Prof. Dr. L. Schwachhöfer
Dr. F. Klinker

WS 2008/2009

Übungsblatt 13 zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Aufgabe 1:

Sei $H \subset M_{4,4}(\mathbb{R})$ die Menge der Matrizen der Form

$$A := a_1 J_1 + a_2 J_2 + a_3 J_3 + a_4 I_4 := \begin{pmatrix} a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & a_4 & a_3 & -a_2 \\ -a_2 & -a_3 & a_4 & a_1 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $J_i \cdot J_k$ für $1 \leq i, j \leq 3$.

b) Berechnen Sie AA^t.

c) Berechnen Sie $\det(A)$.

d) Zeigen Sie, dass H alle Körperaxiome, mit Ausnahme der Kommutativität, erfüllt.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie $\det(A)$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_0^2 & a_1^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$, wobei $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Wann ist A invertierbar?

Aufgabe 3:

a) Entscheiden Sie mit Hilfe des Determinantenkriteriums, für welche Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ die Matrix $A_\lambda := \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \end{pmatrix}$ invertierbar ist.

b) Bestimmen Sie nur mit Hilfe von Determinanten die Lösung von $A_\lambda x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ für alle λ aus a).

c) Bestimmen Sie die Lösungen auch im Fall, dass A_λ nicht regulär ist.

Aufgabe 4:

Es sei $A_n := \left(\alpha_{ij}^{(n)}\right)_{1 \leq i,j \leq n} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ mit $\alpha_{ij}^{(n)} = \delta_{i,j-1} + 2\delta_{ij} + \delta_{i,j+1}$.

a) Zeigen Sie, dass sich $\det(A_n)$ als Linearkombination von $\det(A_{n-1})$ und $\det(A_{n-2})$ darstellen läßt.

b) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass $\det(A_n) = n + 1$.