Prof. Dr. L. Schwachhöfer
Dr. F. Klinker

WS 2008/2009

Übungsblatt 14 zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Aufgabe 1:

a) Es seien $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, sowie $x^{(j)} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda_j \in \mathbb{R}$ für $1 \le j \le n$ definiert durch

$$a_{ij} := \delta_{ij} b + \delta_{j,i+1} c + \delta_{j,i-1} a$$
$$x_i^{(j)} := \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{i-1}{2}} \sin\left(\frac{ij\pi}{n+1}\right)$$
$$\lambda_j := \left(b + 2\,\mathrm{sign}(a)\sqrt{ac}\,\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)\right)$$

mit $ac > 0$. Dabei ist $\mathrm{sign}(a) := \begin{cases} 1 & \text{falls } a > 0 \\ -1 & \text{falls } a < 0 \end{cases}$. Zeigen Sie, dass $x^{(j)}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_j ist.

b) Es sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ eine Matrix, in der die Summe der Einträge der Zeilen konstant ist. Berechnen Sie einen Eigenwert und einen zugehörigen Eigenvektor dieser Matrix.

Aufgabe 2:

a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & 1 & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{pmatrix}$$

b) Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $q \in \mathbb{K}[x]$ ein Polynom. Ferner sei $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von $\varphi \in End(V)$ zum Eigenvektor $v \in V$. Zeigen Sie, dass $q(\lambda)$ ein Eigenwert von $q(\varphi)$ zum Eigenvektor $v \in V$ ist.

Aufgabe 3:

Für $\phi \in End(V)$ bezeichne $\varepsilon(\phi)$ die Menge der Eigenwerete von ϕ. Es seien nun $A_1 \in M_{n,n}(\mathbb{C})$, $A_2 \in M_{m,m}(\mathbb{C})$ und $B \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ und weiter $A := \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \in M_{m+n,m+n}(\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass für die Eigenwerte $\varepsilon(A) = \varepsilon(A_1) \cup \varepsilon(A_2)$ gilt. Läßt sich diese Aussage auch auf die Eigenvektoren erweitern? Zeigen Sie, dass im Fall $B = 0$ folgendes gilt $Eig(A, \lambda) \simeq Eig(A_1, \lambda) \oplus Eig(A_2, \lambda)$. Geben Sie dazu den Isomorphismus explizit an.

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A über dem angegebenen Körper $\mathbb{K}$.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2-i & 0 & 0 \\ i & -3 & 1-i \\ 1 & 0 & 2+i \end{pmatrix}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, (i) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, (ii) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.