## Präsenzübungen zur Numerik 1

- 1.) Wann heißt eine Matrix orthogonal, bzw. unitär? Man gebe ein nichttriviales Beispiel einer reellen, orthogonalen  $3 \times 3$ -Matrix an.
- 2.) Warum besitzen hermitesche Matrizen nur reelle Eigenwerte? Warum stehen Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten senkrecht aufeinander?
- 3.) Wann heißt eine Funktion  $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$  stetig differenzierbar?
- 4.) Wann heißt eine Funktion  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  (strikt) konvex? Wie läßt sich das mit Hilfe von Ableitungen charakterisieren?
- 5.) Besitzen strikt konvexe Funktionen notwendig ein Infimum? (Beweis oder Gegenbeispiel) Falls ja, wird dieses auch angenommen?
- 6.) Man begründe, daß stetige Funktionen auf kompakten Mengen ihr Minimum und ihr Maximum annehmen.
- 7.) Man begründe mit Hilfe der Dreiecksungleichung, daß der Absolutbetrag  $|\cdot|: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ eine stetige Funktion ist.
- 8.) Man gebe eine Funktion  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  an, welche Hölder-stetig mit Exponent 1/2 ist, jedoch nicht Lipschitz-stetig. Wie lautet ein entsprechendes Beispiel im  $\mathbb{R}^3$ ? Wann heißt eine Abbildung kontrahierend?
- 9.) Wie lautet die Taylor-Entwicklung (um  $x_0 = 0$ ) der Funktion  $f: x \to \sin \pi x$ ?
- 10.) Wie lautet die Fourier-Entwicklung der Funktion  $f: x \to \sin \pi x$
- 11.) Eine Folge  $a_n$  erfülle die rekursive Beziehung

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \qquad a_0 = a_1 = 1$$

Man mache den Ansatz  $a_n = \lambda^n$ , bestimme so die möglichen Werte von  $\lambda$  (zwei nichttriviale Lösungen) und man zeige, wie damit  $a_n$  in geschlossener Form angegeben werden kann.

- 12.) Es seien n Vektoren aus  $\mathbb{R}^m$  gegeben, n > m. Wieviele verschiedene Basen des  $\mathbb{R}^m$  lassen sich aus ihnen maximal bilden? In welchem Fall wird die Maximalzahl erreicht?
- 13.) Unter welchen Bedingungen ist ein lineares Gleichungssystem

$$Ax = b$$

lösbar? (A nicht notwendig regulär)

- 14.) Was ist die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung?
- 15.) Sind auf beliebigen Vektorräumen je zwei Normen äquivalent? Wenn nicht, gibt es eine hinreichende Bedingung?