Fakultät Mathematik
Prof. Dr. S. Turek

1. Aufgabenblatt zur Numerik 1

Abgabe: 22.10.2008, 18.00 Uhr in die Kästen im Foyer

Landau-Symbole:
Für Funktionen $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ bedeutet

$$g(x) = \mathbf{O}\left(h(x)\right) \qquad \text{für } x \to 0\ ,$$

dass es ein $x_0 > 0$ und ein $C > 0$ derart gibt, dass für $0 < x < x_0$ gilt

$$|g(x)| \leq C \cdot |h(x)|$$

(bzw. $\frac{|g(x)|}{|h(x)|} \leq C$ wobei $h(x) \neq 0$).

Die Definitionen der Landau-Symbole für $x \to \infty$ sind völlig analog.

Aufgabe 1 (Konvergenzgeschwindigkeit in der „h^α-Skala“)
Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke in der Form $f(h) = \mathbf{O}\left(h^\alpha\right)$ für $h \to 0$ mit möglichst großem $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) $f(h) = 5\left(h^2 + h\right)^2 + 3h^3$

b) $f(h) = \cos h - 1 + h^2/2$

c) $f(h) = \sin x + \dfrac{\sin(x+h) - 2\sin x + \sin(x-h)}{h^2}\ , \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \ :\ k \in \mathbb{Z}\}$

d) $f(h) = (\ln h)^{-1}$

Aufgabe 2 (Konvergenzgeschwindigkeit in der „n^γ-Skala“)
Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke in der Form $g(n) = \mathbf{O}\left(n^\gamma\right)$ für $n \to \infty$ mit möglichst kleinem $\gamma \in \mathbb{R}$.

a) $g(n) = n \cdot e^{-3\ln n}$

b) $g(n) = n^{3/2} - n \cdot \left(1 - \sqrt{n}\right)^2$

c) $g(n) = \ln n + n^{1/3}$

d) $g(n) = \ln\left(1 + 2^{n^2}\right)$

Aufgabe 3 (Asymptotische Beziehungen)
Es seien $f, g, h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \mathbf{O}\left(n^3\right)$ für $n \to \infty$

b) $f(x) = \mathbf{O}\left(1/\sqrt{x}\right), g(x) = \mathbf{O}\left(1/\ln x\right), h(x) = \mathbf{O}\left(1/x\right)$ für $x \to \infty$
$\Longrightarrow f(x) + g(x) + h(x) = \mathbf{O}\left(1/x\right)$ für $x \to \infty$

Programmierübung

Abgabe der bearbeiteten Programmieraufgaben:
Schicken Sie den kommentierten Quelltext zusammen mit den ausgewerteten Ergebnissen per e-mail an Raphael.Muenster@math.uni-dortmund.de. Geben Sie dabei Name und Matrikelnummer der Gruppenmitglieder sowie die Übungsgruppe an.

Aufgabe P.1

Erhöhen Sie – unter MATLAB – die Anzahl der Nachkommastellen für die Ausgabe auf den Bildschirm mit `format long` und berechnen Sie Näherungswerte

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \approx e^x \tag{1}$$

für x= -5.5 mit n = 3, 6, 9, . . . , 30 auf die drei folgenden Arten:

1) Mit der Formel (1) angewendet auf $e^{-5.5}$.
2) Mit der Umformung $e^{-5.5} = 1/e^{5.5}$ und der Formel (1).
3) Mit der Umformung $e^{-5.5} = (e^{-0.5})^{11}$ und der Formel (1).

Zum Vergleich: der exakte Wert ist $e^{-5.5} = 0.0040867714\ldots$. Wie sind die beobachteten Effekte zu erklären?