Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Turek

2. Aufgabenblatt zur Numerik 1

Abgabe: 29.10.2005, 18.00 Uhr in die Kästen im Foyer

Aufgabe 1 (Keine Assoziativität bei Maschinenzahlen)
Es seien drei Maschinenzahlen x^1, x^2, x^3 mit $|x^1| >> |x^2|, |x^3|$ gegeben (z. B. $x^1 \sim 10^4$, $x^2 \sim x^3 \sim 1$). Welcher der beiden Algorithmen

a) $(x^1 \oplus x^2) \oplus x^3$, b) $x^1 \oplus (x^2 \oplus x^3)$

ist numerisch stabiler zur Berechnung der Summe $x^1 + x^2 + x^3$?

Aufgabe 2* (Bonusaufgabe zur Konditionierung)
Gegeben sei eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ durch:

$$\varphi(p,q) = \begin{pmatrix} p+q \\ e^{p/q} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie deren Konditionszahlen k_{ij}, $1 \leq i,j \leq 2$.
Wann ist das Problem gut konditioniert?

Aufgabe 3 (Konditionierung von Division und Potenzbildung)
Untersuchen Sie die Konditionierung der folgenden Rechenoperationen:

a) Division: $f(x,y) = x/y$ $(y \neq 0)$, speziell $f(y) = 1/y$

b) Potenzbildung: $f(x,y) = x^y$ $(x > 0)$, speziell $f(x) = \sqrt{x}$

Wie groß ist der maximale relative Fehler im Ergebnis, ausgedrückt in der Form $\alpha\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, wenn die relativen Fehler in den Argumenten durch ε beschränkt sind?

Aufgabe 4 (Fehlerfortpflanzung)
Zeigen Sie, daß bei funktionalen Zusammenhängen der Form

$$y = f(x_1, \ldots, x_m) := c\frac{x_1 \cdot \cdots \cdot x_r}{x_{r+1} \cdot \cdots \cdot x_m}$$

mit einem $1 < r \leq m$, der relative Fehler bei Störungen (in erster Näherung) abschätzbar ist durch

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \leq \sum_{i=1}^{m} \left|\frac{\Delta x_i}{x_i}\right| .$$

`Mit *Bonusaufgaben kann man Punkte über 100% hinaus erwerben.`

Programmierübung

Abgabe der bearbeiteten Programmieraufgaben:
Schicken Sie den kommentierten Quelltext zusammen mit den ausgewerteten Ergebnissen per e-mail an Raphael.Muenster@math.uni-dortmund.de. Geben Sie dabei Name und Matrikelnummer der Gruppenmitglieder sowie die Übungsgruppe an.

Aufgabe P.1

Man schreibe eine Funktion zur Berechnung der reellen Lösungen der allgemeinen quadratischen Gleichung

$$p(x) := ax^2 + bx + c = 0$$

zu gegebenen $a, b, c \in \mathbb{R}$. Es sollen alle möglichen Fälle der Degenerierung (z.B. $a = 0$) berücksichtigt und der Einfluß des Rundungsfehlers minimiert werden. Man erprobe das Programm an folgenden Fällen

a	2	0	0	1	0	1	4	10
b	10	0	1	0	0	-2	-12	10
c	1	1	0	0	0	8	9	0.01

Man teste, ob die berechneten Lösungen das Genauigkeitskriterium

$$\left| \frac{p(x)}{p'(x)} \right| \leq 10^{-12}$$

erfüllen.