

### 3. Aufgabenblatt zur Numerik 1

Abgabe: 12.11.2008, 18.00 Uhr in die Kästen im Foyer

#### Aufgabe 1 *Kondition unitärer Matrizen*

Zeigen Sie, dass unitäre Matrizen  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  die Spektralkondition  $\text{cond}_{\text{nat}} U = 1$  besitzen.

#### Aufgabe 2 *Fehlerverstärkung bei Lösung linearer Gleichungssysteme*

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wie groß ist der relative Fehler  $\|\Delta x\|_{\infty} / \|x\|_{\infty}$ , wenn der relative Fehler in den Matrixelementen höchstens  $\pm 1\%$  und der in den Komponenten der rechten Seite höchstens  $\pm 3\%$  beträgt? Zeichnen Sie die Punktmenge im  $\mathbb{R}^2$ , in der gemäß dieser Abschätzung die Lösung  $x + \Delta x$  des gestörten Systems liegt.

#### Aufgabe 3 *Gaußalgorithmus*

Gegeben seien die Matrix und der Vektor

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ -18 \end{pmatrix}.$$

- Lösen Sie das Gleichungssystem  $Ax = b$  mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens mit Spaltenpivotierung.
- Bestimmen Sie die Matrizen  $P$  und  $L$  aus der LR-Zerlegung  $PA = LR$ .
- Berechnen Sie die Inverse  $A^{-1}$  (Tipp: Einfach, wenn man die LR Zerlegung mit Einheitsvektoren  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  als rechter Seite anwendet).
- Der Vektor  $b$  sei mit einem relativen Fehler  $\|\Delta b\|_{\infty} / \|b\|_{\infty}$  von 10 % behaftet. Geben Sie eine obere Schranke für den zu erwartenden Fehler  $\|\Delta x\|_{\infty} / \|x\|_{\infty}$  der Lösung  $x$  an.

#### Aufgabe 4\* *Eindeutigkeit der LR-Zerlegung*

- Verifizieren Sie, dass die regulären unteren Dreiecksmatrizen  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (und ebenso die regulären oberen Dreiecksmatrizen  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ) bzgl. der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bilden. Ist diese Gruppe abelsch?

Abgabe der bearbeiteten Programmieraufgaben:

Schicken Sie den kommentierten Quelltext zusammen mit den ausgewerteten Ergebnissen per e-mail an Raphael.Muenster@math.uni-dortmund.de. Geben Sie dabei Name und Matrikelnummer der Gruppenmitglieder sowie die Übungsgruppe an.

### Aufgabe P.1

Man schreibe ein Programm zur Berechnung der Inversen einer Matrix mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens (ohne vorgefertigte MATLAB-Routinen). Man wende es an um die Kondition der Hilbertmatrizen  $H_n$  für  $n = 2, 4, 6, 8, 10$  zu berechnen. Es gilt

$$h_{ij} = \left( \frac{1}{i+j} \right)_{i,j=1,\dots,n} \quad z.B. \quad H_4 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}.$$

Zur Überprüfung der Ergebnisse benutze man die MATLAB-Funktionen `inv` und `cond`.