Fakultät Mathematik
Prof. Dr. S. Turek

5. Aufgabenblatt zur Numerik 1

Abgabe: 19.11.2005, 18.00 Uhr in die Kästen im Foyer

Aufgabe 1 *Numerischer Aufwand des Gaußschen Eliminationsverfahrens*

Gegeben sei eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, für die eine LR-Zerlegung existiert.

a) Zeigen Sie: Das Gaußsche Eliminationsverfahren zur Lösung von $Ax = b$ erfordert $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ Operationen für $n \to \infty$ (eine Operation = eine Multiplikation, eine Addition oder eine Division).

b) Wieviel mal grösser ist der Aufwand der Inversenberechnung A^{-1} verglichen mit der LR-Zerlegung, wenn man die Beziehung $A^{-1} = (x^{(1)}, \cdots, x^{(n)})$ ausnutzt und $x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}$ die Lösungen von $Ax^{(i)} = e^{(i)}$, $1 \le i \le n$, und $e^{(1)}, \cdots, e^{(n)}$ die Einheitsvektoren im $\mathbb{C}^n$ sind? (Hinweis: Der Aufwand für Lösen per Rückwärts- bzw. Vorärtseinsetzen kann dabei mit $n^2 + O(n)$ Operationen angegeben werden.)

Aufgabe 2 *LR-Zerlegung*

Bestimmen Sie die LR-Zerlegung nach Gauß und die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 *Spezielle Bandmatrix*

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 13 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 18 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 25 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 34 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 58 \end{pmatrix}.$$

a) Überlegen Sie ob die Inverse von A^{-1}, bzw. von Tridiagonalmatrizen allgemein, ebenfalls Tridiagonalgestalt hat und geben Sie wenn möglich ein Argument an.

b) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von A mittels der speziellen Rekursion für Tridiagonalmatrizen aus der Vorlesung (Thomas Algorithmus).

`Mit *Bonusaufgaben kann man Punkte über 100% hinaus erwerben.` bitte wenden →

Aufgabe 4* *Rangbestimmung*

Gegeben sei das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 4 & 12 & -6 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A und argumentieren Sie dann über die Lösbarkeit von $Ax = b$.