Fakultät Mathematik
Prof. Dr. S. Turek

6. Aufgabenblatt zur Numerik 1

Abgabe: 26.11.2005, 18.00 Uhr in die Kästen im Foyer

Aufgabe 1 *LR-Zerlegung nach Cholesky*

Bestimmen Sie die $\tilde{L}\tilde{L}^T$-Zerlegung nach Cholesky der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Welche Beziehung besteht zwischen den Matrizen $L_{\text{Gauß}}$ (Aufgabe 2, Blatt 5) und $\tilde{L}_{\text{Cholesky}}$?

Aufgabe 2 *Cholesky-Zerlegung einer Bandmatrix*

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 13 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 18 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 25 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 34 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 58 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie mit dem Algorithmus von Cholesky die Cholesky-Zerlegung $A = \tilde{L}\tilde{L}^T$.

b) Leiten Sie hiermit die LR-Zerlegung von A im Sinne von Gauß ab.

Aufgabe 3* *Überbestimmte Gleichungssysteme*

Gegeben sei das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 4 & 12 & -6 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Argumentieren Sie, ob $Ax = b$ lösbar ist.

b) Bestimmen Sie eine „Lösung" von $Ax = b$ im Sinne der Methode der kleinsten Fehlerquadrate.

c) Ist diese Lösung eindeutig?

d) Ist $A^T A$ positiv definit?

`Mit *Bonusaufgaben kann man Punkte über 100% hinaus erwerben.` bitte wenden →

Eine radioaktive Substanz zerfällt gemäß

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \ ,$$

wobei N die Substanzmenge und N_0 deren Wert zur Zeit $t = 0$ bezeichnet. Bestimmen Sie mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate die Halbwertszeit $t_{1/2}$ (das ist der Zeitpunkt mit $N(t_{1/2}) = N_0/2$) und die Anfangsmenge N_0 aus folgender Meßreihe:

t	2	4	6	8
N	90	12.2	7.4	2.7

Hinweis: Berechnen Sie $t_{1/2}$ und N_0 nicht direkt, sondern über eine lineare Gleichung, die Sie durch eine Umformung gewinnen.

Programmierübung

Abgabe der bearbeiteten Programmieraufgaben:
Schicken Sie den kommentierten Quelltext zusammen mit den ausgewerteten Ergebnissen per e-mail an Raphael.Muenster@math.uni-dortmund.de. Geben Sie dabei Name und Matrikelnummer der Gruppenmitglieder sowie die Übungsgruppe an.

Aufgabe P.1

Testen Sie im folgenden Ihre Implementierung des Gauss-Algorithmus an der Hilbertmatrix H_n $(h_{ij} = (\frac{1}{i+j-1}))$ sowie an der Blockmatrix A_n, $(n = m^2,\ m \geq 3,\ I_m$ Einheitsmatrix)

$$A_n = \begin{pmatrix} B_m & -I_m & & \\ -I_m & B_m & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -I_m \\ & & -I_m & B_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B_m = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & \\ -1 & 4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m}.$$

Berechnen Sie mit Hilfe Ihrer Implementation die Inverse dieser Matrizen für verschiedene n. Vergleichen Sie dabei stichprobenartig die von Ihnen berechnete Inverse mit der von MATLAB berechneten Inversen, um die Korrektheit Ihrer Implementation sicherzustellen (z.B. mit Hilfe von Matrixnormen angewendet auf die Differenz der Inversen). Berechnen Sie numerisch mit Ihrer Implementation sowie mit MATLAB die Konditionszahl der Matrix sowie Speicherplatzbedarf und Laufzeit des Algorithmus zur Berechnung der Inversen (in Abhängigkeit von der Problemgrösse) und stellen Sie die Ergebnisse graphisch dar. Welches Verhalten lässt sich aus den Kurven ablesen? Wie gross können Sie n in Ihrem Programm bzw. in MATLAB maximal wählen?