

7. Aufgabenblatt zur Numerik 1

Abgabe: 3.12.2008, 18.00 Uhr in die Kästen im Foyer

Aufgabe 1 *QR-Zerlegung nach Householder*

Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Householder-Verfahrens.

Aufgabe 2 *Lösung der Normalgleichung mit QR-Zerlegung*

Gegeben sei eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Mit Hilfe der QR-Zerlegung von A läßt sich das Normalgleichungssystem $A^T A x = A^T b$ überführen in das dazu äquivalente Dreieckssystem $R x = Q^T b$. Zeigen Sie

$$\text{cond}_{\text{nat}} R \leq \text{cond}_{\text{nat}} A .$$

Wie groß ist der numerische Aufwand dieser Methode zur Lösung des Normalgleichungssystems verglichen mit dem der direkten Cholesky-Zerlegung von $A^T A$?

Aufgabe 3 *Verschiedene Darstellungen des Interpolationspolynoms*

a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom p zu den Stützpunkten

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	3
f_i	1	3	2	4

in Lagrangescher und Newtonscher Darstellung und berechnen Sie $p(5)$.

b) Fügen Sie der obigen Tabelle den Stützpunkt $(x_4, f_4) = (6, 6)$ hinzu, und lösen Sie Aufgabe a) mit der so erweiterten Tabelle.

Aufgabe 4* *Interpolation*

Bestimmen Sie das approximierende Polynom p zu der Funktion

$$f(x) = |x| , \quad -2 \leq x \leq 2 ,$$

durch Interpolation in P_4 nach Newton bzgl. der Stützstellen $x_i = -2 + i, i = 0, \dots, 4$. Skizzieren Sie den Funktionsverlauf.