Fakultät Mathematik
Prof. Dr. S. Turek

12. Aufgabenblatt zur Numerik 1

Abgabe: 20.01.2009, 18.00 Uhr in die Kästen im Foyer

Aufgabe 1 *Gleichmässige Approximation*

Gegeben sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cos \pi x$. Berechnen Sie Bestapproximationen in den Polynomräumen P_0, P_1, P_2 bzgl. des gewichteten Skalarprodukts $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Vergleichen Sie die L^2-Norm und die Maximumsnorm der Fehler mit den Ergebnissen der Gauss-Approximation von Blatt 11.

Aufgabe 2 *Gauss-Approximation von* $\sqrt{x}$

Bestimmen Sie die beste Approximation im Sinne von Gauß an die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$, in den Polynomräumen P_0, P_1 und P_2.
Hinweis: Legendre-Polynome können hier nach Variablentransformation genutzt werden.

Aufgabe 3* *Tschebyscheff Polynome*

a) Zeigen Sie die folgende Darstellung der Tschebyscheff-Polynome:

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n\right] , \qquad x \in \mathbb{R}\backslash]-1,1[\ .$$

b) Für $a > 3/2$ sei $f_a : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_a(x) = \dfrac{1}{x+a}$.
Beweisen Sie, daß die Folge der Lagrangeschen Interpolationspolynome $p_n \in P_n$ vom Grad n an f_a in den Nullstellen von T_{n+1} gleichmäßig auf $[-1,1]$ gegen f_a konvergiert.

Aufgabe 4 *Tschebyscheff-Approximation von* $\sqrt{x}$

Bestimmen Sie die beste Approximation im Sinne der Tschebyscheff-Approximation an die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$ in den Polynomräumen P_0 und P_1.
Hinweis: Versuchen Sie bei der Bestimmung des bestapproximierenden linearen Polynoms $p_1 \in P_1$ den Ansatz, daß die Punkte $0, 1$ und ξ mit $0 < \xi < 1$ Alternantenpunkte sind. Bestimmen Sie aus den resultierenden Beziehungen für die Fehlerfunktion die Koeffizienten von p_1.

`Mit *Bonusaufgaben kann man Punkte über 100% hinaus erwerben.`