Fakultät Mathematik
Prof. Dr. S. Turek

13. Aufgabenblatt zur Numerik 1

Abgabe: 28.01.2009, 18.00 Uhr in die Kästen im Foyer

Aufgabe 1 *Summierte Quadraturformeln*
Bestimmen Sie eine Näherung für

$$\ln 2 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$$

durch numerische Quadratur mit Hilfe der summierten Simpsonregel in einer Genauigkeit von $4 \cdot 10^{-5}$. Wieviele Funktionsauswertungen sind erforderlich, um die gleiche Genauigkeit bei Verwendung der summierten Trapezregel garantieren zu können?

Aufgabe 2 *Normalverteilung*
Bestimmen Sie

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-t^2/2}\,dt$$

auf vier Nachkommastellen genau mit einer numerischen Methode Ihrer Wahl. Begründen Sie, daß Ihr Ergebnis ausreichend genau ist.

Aufgabe 3 *Eine spezielle Quadraturformel*
Zur numerischen Berechnung von

$$I(f) := \int_{-1}^1 f(x)\,dx$$

für eine stetige Funktion $f\,:\,[-1,1] \to \mathbb{R}$ wird die folgende Formel vorgeschlagen:

$$I_n(f) := \frac{1}{9}\Big(f(-1) + 8f(-1/2) + 8f(1/2) + f(1)\Big)$$

a) Beweisen Sie, daß mit dieser Formel alle Polynome bis zu einem Höchstgrad von 3 exakt integriert werden, d. h., es gilt $I_n(p) = I(p)$ für $p \in P_3$.

b) Folgern Sie für $f \in C^4[-1,1]$ die Fehlerabschätzung

$$|I_n(f) - I(f)| \leq \frac{1}{24} \max_{\xi\in[-1,1]} |f^{(4)}(\xi)| \cdot \int_{-1}^1 \left|\left(x^2-1\right)\left(x^2-1/4\right)\right|\,dx \leq \frac{1}{96} \max_{\xi\in[-1,1]} |f^{(4)}(\xi)|\ ,$$

indem Sie f durch sein Interpolationspolynom der Ordnung 3 mit Stützstellen $-1, -1/2, 1/2, 1$ ersetzen und das Integral über den Interpolationsfehler abschätzen.

Aufgabe 4* *Rombergverfahren*
Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$$

mit Hilfe des Romberg-Verfahrens zur Schrittweitenfolge $h_i = \dfrac{\pi}{2}\,2^{-i}$ auf vier Nachkommastellen genau. Kontrollieren Sie den Fehler mit der *a-posteriori*-Fehlerschätzung aus der Vorlesung.

`Mit *Bonusaufgaben kann man Punkte über 100% hinaus erwerben.` bitte wenden →

Programmierübung

Abgabe der bearbeiteten Programmieraufgaben:
Schicken Sie den kommentierten Quelltext zusammen mit den ausgewerteten Ergebnissen per e-mail an Raphael.Muenster@math.uni-dortmund.de. Geben Sie dabei Name und Matrikelnummer der Gruppenmitglieder sowie die Übungsgruppe an.

Aufgabe P.1

Man berechne die Bestapproximation im Polynomraum P_n bzgl. der L_2-Norm (Gaussapproximation) der Funktionen

$$f(x) = |x|^{1/2}, \quad -1 \leq x \leq 1$$

und

$$g(x) = cos(\pi x), \quad -1 \leq x \leq 1$$

a) Dazu wähle man eine geeignete Quadraturformel und implementiere numerische Integration auf dem Intervall $[-1, 1]$.

b) Man berechne den L_2- und L_∞-Fehler der Bestapproximationen in P_n. Ist eine Gesetzmässigkeit des Fehlers in Abhängigkeit von $n = 2^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$ zu beobachten?

Aufgabe P.2

Man erweitere den Code aus Aufgabe P.1, um die Bestapproximation bzgl. des gewichteten Skalarprodukts $(.,.)_\omega,\ \omega = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ und löse damit Teil b) aus P.1.

Hinweis: Bei beiden Aufgaben ist die volle Zahl von je 4 Punkten erreichbar.