Prof. Dr. Michael Voit
Dr. A. Neuenkirch
Dipl.-Math. A. Kaplun

WS 2009/10

Analysis I

Blatt 1

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis1/ana_I_0910.html

Besprechung:
Für Lehramtsstudenten:
Donnerstag, 15.10.2009, 13.00 - 14.00 Uhr, HG II / HS 5
Für Sonstige:
Donnerstag, 15.10.2009, 12.00 - 13.00 Uhr, HG II / HS 5 (normale Globalübung)

Aufgabe 1 Regeln für Mengenoperationen

Es seien M, N, P Teilmengen einer Menge G.
Zeigen Sie:

a) Distributivgesetz: $M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$.

b) Die Morgansche Regel: $G \backslash (M \cup N) = (G \backslash M) \cup (G \backslash N)$.

Aufgabe 2

Es sei $f : A \to B$ eine Funktion.

a) Zeigen Sie für $C, D \subset A$, dass $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$ gilt.

b) Geben Sie ein Gegenbeispiel an, das zeigt, dass im allgemeinen $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$ nicht gilt.

c) Unter welcher folgenden Bedingungen ist b) dennoch richtig:

i) f injektiv,

ii) f surjektiv.

Aufgabe 3 Summen ungerader Zahlen

Bestimmen Sie die Summen

$1,$
$1 + 3,$
$1 + 3 + 5,$
$1 + 3 + 5 + 7$ und
$1 + 3 + 5 + 7 + 9.$

Erraten Sie daraus eine Gesetzmäßigkeit für

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (1 + 2n) = \sum_{k=1}^{n} (1 + 2k).$$

Beweisen Sie anschließend Ihre Vermutung mit vollständiger Induktion.
Leiten Sie ferner in einem zweiten Ansatz die Summenformel direkt aus der bekannten Formel für die arithmetische Summe $1 + 2 + \ldots + n$ her!

Hausaufgaben

H1:
Welche der folgenden Aussagen sind wahr:

a) $x < 4 \Rightarrow x < 5,$

b) $x < 5 \Rightarrow x < 4,$

c) $2 < 3 \Rightarrow 3 < 5,$

d) $3 < 2 \Rightarrow 5 < 3.$

H2:
Verneinen Sie in kurzen Worten folgende Aussagen:

a) Es gibt ein schwarzes Schaf, das gerne Salat frisst.

b) Alle Studierende der Analysis sind intelligent und fleißig.

c) In der Analysis-Vorlesung schläft Tim oder er rutscht mit seinen Banknachbarn.

H3:
Es seien A, B Mengen und $f : A \to B$ eine beliebige Funktion. Für eine Menge $C \subset B$ heißt

$$f^{-1}(C) := \{x \in A : f(x) \in C\} \subset A$$

das Urbild von C unter f.

a) Zeigen Sie, dass für Mengen $C, D \subset B$ gilt:

$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D).$$

b) Entscheiden Sie durch Beweis bzw. Gegenbeispiel, ob für beliebige $C, D \subset B$ folgendes gilt:

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D).$$

H4:
Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

H5:
Berechnen Sie

$$S(n) := \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

für $n = 2, 3, 4$.
Erraten Sie hieraus eine Summenformel für $S(n)$, und beweisen Sie dann Ihre Vermutung mit vollständiger Induktion.

Abgabe der Hausaufgaben:

Bis Montag, 19.10.2009, 14.00 Uhr, im Briefkasten am Eingang zum Mathematik-Gebäude, der zu Ihrer Übungsgruppe gehört.