Prof. Dr. Michael Voit
Dr. A. Neuenkirch
Dipl.-Math. A. Kaplun

WS 2009/10

Analysis I

Blatt 2

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis1/ana_I_0910.html

Tutorübungen:

Aufgabe 1

Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$ und $x \neq 1$

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}.$$

Aufgabe 2

Es sollen n unterscheidbare Kugeln auf k in einer Reihe stehende Schachteln verteilt werden, wobei jede Schachtel beliebig viele Kugeln enthalten darf.
Zeigen Sie, dass es

$$\binom{n+k-1}{n}$$

mögliche Verteilungen gibt.

Aufgabe 3

Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$:

a) $\frac{2n+1}{(n+1)^2} \geq \frac{2}{n+2}$

b) $\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{n+1}$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass $\sqrt{3/2}$ irrational ist.

Aufgabe 5

Wo liegt der Fehler in folgendem Beweis:

Behauptung: Alle Menschen haben dieselbe Größe. Beweis durch vollständige Induktion nach der Zahl $n \in \mathbb{N}$ einer Gruppe von n Menschen.
Induktionsanfang $n = 1$. Hier ist die Behauptung offensichtlich korrekt.

Induktionsschritt: Es sei eine Gruppe von $n + 1$ Personen gegeben. Eine wird abgesondert. Die restlichen n Personen haben nach Induktionsannahme dieselbe Größe. Nun nehme die abgesonderte Person zur Gruppe dazu und entferne eine andere Person der Gruppe. Wieder haben nach Induktionsannahme diese n Personen dieselbe Größe. Also haben alle $n + 1$ Personen dieselbe Größe, was den Induktionsbeweis komplettiert.

Goethe zur vollständigen Induktion

Zur vollständigen Induktion bemerkt Mephisto in Goethes "Faust":

Der Philosoph, der tritt herein
Und beweist Euch, es müßt' so sein:
Das Erst'wär' so, das Zweite so,
Und drum das Dritt' und Vierte so;
Und wenn das Erst' und Zweit' nicht wär',
Das Dritt' und Viert' wär nimmermehr.

Das griechische Alphabet

α	alpha	ι	iota	ρ, ϱ	rho
β	beta	κ	kappa	σ	sigma
γ	gamma	λ	lambda	τ	tau
δ	delta	μ	my	υ	upsilon
ϵ, ε	epsilon	ν	ny	ϕ, φ	phi
ζ	zeta	ξ	xi	χ	chi
η	eta	o	omikron	ψ	psi
θ, ϑ	theta	π	pi	ω	omega

Einige Großbuchstaben

Γ	Gamma
Λ	Lambda
Σ	Sigma
Ψ	Psi
Δ	Delta
Ξ	Xi
Υ	Upsilon
Ω	Omega
Θ	Theta
Π	Pi
Φ	Phi

Hausaufgaben:

H1:
Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}\, n^2(n+1)^2 \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}.$$

H2:
Die Potenzmenge einer Menge M ist definiert als

$$P(M) := \{A \text{ Menge}: \ A \subseteq M\}.$$

a) Bestimmen Sie die Potenzmenge von $M = \{1, 2, 3\}$.

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für eine n-elementige Menge M die Potenzmenge 2^n Elemente hat.

H3:
Entscheiden Sie, welche der folgenden Zahlen irrational ist

a) $\sqrt{6}$.

b) 1,412.

Die Antwort ist zu begründen!

H4:
Für eine beliebige Zahl x und $k \in \mathbb{N}_0$ definiert man den verallgemeinerten Binomialkoeffizienten

$$\binom{x}{k} := \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!} \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

a) Berechnen Sie $\binom{-1}{k}$ und $\binom{1/2}{k}$ für $k = 0, 1, 2$ und stellen Sie diese Zahlen für allgemeines $k \in \mathbb{N}$ möglichst einfach dar.

b) Beweisen Sie die Additionsformel

$$\binom{x+1}{k} = \binom{x}{k-1} + \binom{x}{k}.$$

H5:
Für die Potenzsummen

$$S_n^p := 1^p + 2^p + \ldots + n^p = \sum_{k=1}^{n} k^p \quad (n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}_0)$$

leite man mit Induktion nach n folgende von Pascal stammende Identität her:

$$\binom{p+1}{1} S_n^p + \binom{p+1}{2} S_n^{p-1} + \ldots + \binom{p+1}{p+1} S_n^0 = (n+1)^{p+1} - 1.$$

Aus den von früher bekannten Formeln für S_n^0, S_n^1, S_n^2 leite man die Formel aus der Aufgabe (H1) für S_n^3 direkt her!

Sprechstunde:

Prof. Dr. M. Voit:	Dienstag, 14.00 - 15.00 Uhr, Raum 619
Dr. A. Neuenkirch:	Donnerstag, 13.15 - 14.15 Uhr, Raum 625
Dipl.-Math. A. Kaplun:	Montag, 10.00 - 11.00 Uhr, Raum 634

Abgabetermin: Bis Montag, 26.10.2009, 14.00 Uhr, im Briefkasten am Eingang zum Mathematik-Gebäude, der zu Ihrer Übungsgruppe gehört.