Prof. Dr. Michael Voit
Dr. A. Neuenkirch
Dipl.-Math. A. Kaplun

WS 2009/10

Analysis I

Blatt 3

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis1/ana_I_0910.html

Tutorübungen:

Aufgabe 1
Es sei K ein angeordneter Körper. Zeigen Sie:

a) $(-1) \cdot (-1) = 1$.

b) Für $a, b \in K$ mit $a > b > 0$ gilt $a^{-1} < b^{-1}$.

c) $|a^{-1}| = |a|^{-1}$.

d) K hat unendlich viele Elemente.

Aufgabe 2
Zu den folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ entscheide man, ob Maximum, Minimum, Supremum bzw. Infimum existieren, und bestimme dieses gegebenenfalls:

a) $]-1/2, 1[\ \cup\ [2,3]$;

b) $\{1 + 1/2^n : n \in \mathbb{N}\}$;

c) $\mathbb{Q} \cap [-1, 1]$.

Aufgabe 3
Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleere, nach oben beschränkte Mengen. Zeigen Sie, dass auch

$$A + B := \{a + b : \ a \in A \quad \text{und} \quad b \in B\} \subset \mathbb{R}$$

nach oben beschränkt ist, und dass

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

gilt.

Aufgabe 4

Für positive Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ definiert man das **arithmetische, geometrische** und **harmonische** Mittel als

$$A(a,b) := \frac{a+b}{2}, \quad G(a,b) := \sqrt{a \cdot b}, \quad H(a,b) := \frac{1}{A(1/a, 1/b)} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Beweisen Sie die Ungleichung

$$H(a,b) \leq G(a,b) \leq A(a,b),$$

und zeigen Sie, dass Gleichheit nur für $a = b$ gilt.

Hausaufgaben:

H1:

Skizzieren Sie $\{x \in \mathbb{R} : \Big| |x| - 5 \Big| \leq 1\}$ auf der reellen Zahlengeraden.

H2:

Entscheiden Sie mit einer kurzen Begründung, ob $\mathbb{Z}$ mit den üblichen Optionen $+, \circ$ ein Körper ist.

H3:

Es sei K ein angeordneter Körper. Zeigen Sie für $x, y, u, v \in K$:

a) $x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^{-1} > 0.$

b) $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y.$

c) $x > y > 0,\ u > v > 0 \quad \Rightarrow \quad xu > yv.$

d) $|xy^{-1}| = |x| \cdot |y|^{-1}.$

e) $x \cdot x \geq 0.$

H4:

Zu den folgenden Mengen entscheide man, ob Maximum, Minimum, Supremum bzw. Infimum existieren, und bestimme dieses gegebenenfalls:

a) $\{x \in \mathbb{R} :\ x^2 > 2\};$

b) $\{(-1)^n\ (1 - 1/n) : n \in \mathbb{N}\};$

c) $\{7\}.$

H5:
Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleere, nach oben beschränke Mengen. Wir definieren

$$A \cdot B := \{a \cdot b : \ a \in A, \ b \in B\}.$$

Zeigen Sie:

a) Ist $A \subset B$, so gilt $\sup A \leq \sup B$;

b) Falls $A \cup B \subset [0, \infty[$ gilt, $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$.

c) Geben Sie ein Gegenbeispiel von Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$, für die $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \cdot \sup B$ gilt.

H6: Iterative Bestimmung der Quadratwurzel:
Seien $0 < a < b$. Definiere für $n \in \mathbb{N}$ rekursiv Intervalle $[a_n, b_n]$ durch:

I) $[a_1, b_1] := [a, b]$.

II) $[a_{n+1}, b_{n+1}] := [H(a_n, b_n), \ A(a_n, b_n)]$ (mit H und A wie in Tutoraufgabe 4).

Zeigen Sie:

a) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n < \sqrt{ab} < b_n$;

b) $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{4a}(b_n - a_n)^2$.

(Hinweis: Fakten aus Tutoraufgaben 4 dürfen verwendet werden!).
Zur numerischen Berechnung von $\sqrt{2} \approx 1,4$ wähle man $a = 1$ und $b = 2$.
Bestimmen Sie in diesem Fall mit einem Taschenrechner (oder Computerprogramm) a_n und b_n für $n = 2, 3, 4, 5$.
Können Sie ein $n \in \mathbb{N}$ bestimmen, so dass

$$\left| a_n - \sqrt{2} \right| \leq 10^{-100}$$

gilt?

Abgabetermin: Bis Montag, 02.10.2009, 14.00 Uhr, im Briefkasten am Eingang zum Mathematik-Gebäude, der zu Ihrer Übungsgruppe gehört.