

# Analysis I

## Blatt 4

### Homepage:

[http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lxiv/analysis1/ana\\_I.0910.html](http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lxiv/analysis1/ana_I.0910.html)

### Tutorübungen:

### Aufgabe 1

Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in der Form  $a + ib$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) dar:

$$\frac{3 + 4i}{3 - 4i}, \quad \frac{1}{(3 - i)^2}, \quad (1 + i)^n + (1 - i)^n.$$

### Aufgabe 2

- a) Man zeige, dass drei verschiedene Punkte  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  genau dann auf einer Geraden liegen, wenn  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$  reell ist.
- b) Zeichnen Sie folgende Teilmengen von  $\mathbb{C}$  :

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - i| \leq 1\};$$

$$\{z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z - 1}{z + 1} \right| \leq 1\}.$$

### Aufgabe 3      Dritte Einheitswurzeln:

Bestimmen Sie alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z^3 = 1$ , und zeigen Sie, dass diese Zahlen auf einem gleichseitigen Dreieck liegen.

#### Aufgabe 4

- a) Zeigen Sie, dass sich jede Kreislinie in  $\mathbb{C}$  schreiben lässt als

$$\{z \in \mathbb{C} : a|z|^2 + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0\}$$

mit passenden Parametern  $a, c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}$ .

- b) Für welche Parameter  $a, c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}$  stellt obige Menge einen Kreis bzw. eine Gerade dar? Wann besteht obige Menge nur aus einem Punkt?

#### Hausaufgaben:

##### H1:

Zeichnen Sie die folgenden Teilmengen von  $\mathbb{C}$  :

- a)  $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z + 3i| \leq 2\}$ ;  
b)  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1, |\operatorname{Re} z| \leq 1/2\}$ .

##### H2:

Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag von

- a)  $\frac{2-i}{2-3i}$  ;  
b) allen Lösungen von  $z^2 = i$ .

##### H3:

Bestimmen Sie alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z^3 = \bar{z}$ .  
(Tipp: Betrachte den Betrag!).

##### H4:

Betrachte  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  mit  $1 + z_1 + z_2 = 0$  und  $|z_1| = |z_2| = 1$ .  
Bestimmen Sie diese Punkte, und zeigen Sie, dass  $1, z_1, z_2$  auf einem gleichseitigen Dreieck liegen.

##### H5:

Zeigen Sie für  $z, w \in \mathbb{C}$  :

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

Deuten Sie die Formel geometrisch anhand eines passenden Parallelogramms!

**H6\*:**

Es seien  $a$  und  $b$  natürliche Zahlen, die als Summen zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellbar sind, d.h.

$$a = n^2 + m^2, \quad b = p^2 + q^2.$$

Man zeige, dass auch  $a \cdot b$  als Summe zweier Quadrate von ganzen Zahlen darstellbar ist.

(Anleitung: Deute  $a$  und  $b$  als Normen passender komplexer Zahlen!)

**H7\*:**

Im Nachlass des Piraten Egon Einauge findet ein junger Abenteurer folgenden Hinweis auf die gesammelten Schätze des Piraten:

Auf der Teufelsinsel im Indischen Ozean stehen zwei Bäume  $A$  und  $B$  sowie ein Galgen. Man gehe vom Galgen auf geradem Wege zum Baum  $A$  und zähle die Schritte. Bei  $A$  wende man sich um  $90^\circ$  nach links und gehe nochmals die gleiche Schrittzahl geradeaus zur Stelle  $A'$ . Nun gehe man analog vom Galgen zum Baum  $B$ , wende sich um  $90^\circ$  nach rechts und erreiche mit der Schrittzahl zwischen Galgen und Baum  $B$  den Punkt  $B'$ . Gräbt man in der Mitte zwischen  $A'$  und  $B'$ , so wird man den Schatz finden ...

Der Abenteurer macht sich auf den Weg. Er findet aber nur die Bäume und keine Spur mehr vom Galgen. Dennoch entdeckt er den Schatz.

Wo liegt er?

**Abgabetermin:** Bis Montag, 09.11.2009, 14.00 Uhr, im Briefkasten am Eingang zum Mathematik-Gebäude, der zu Ihrer Übungsgruppe gehört.