Prof. Dr. Michael Voit
Dr. A. Neuenkirch
Dipl.-Math. A. Kaplun

WS 2009/10

Analysis I

Blatt 5

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis1/ana_I_0910.html

Tutorübungen:

Aufgabe 1
Dividieren Sie

$$p(x) := 2x^3 + x^2 - x - 1$$

durch

$$q(x) := x^2 + 1 \quad \text{mit Rest.}$$

Aufgabe 2
Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegungen von

$$\frac{1}{z(z-1)^2} \quad \text{und} \quad \frac{z^4 + z^2 + 1}{z^3 - z^2}.$$

Aufgabe 3 **Gerade und ungerade Funktionen:**
Es sei $D \subset \mathbb{R}$ mit $\emptyset \neq D = -D := \{-x : x \in D\}$.
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt
gerade, falls $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$ gilt, und
ungerade, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass jede Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ darstellbar ist als $f = g + v$ mit einer geraden Funktion $g : D \to \mathbb{C}$ und einer ungeraden Funktion $v : D \to \mathbb{C}$. Zeigen Sie ferner, dass dabei g und v eindeutig bestimmt sind.

b) Führen Sie die Zerlegung aus a) durch für

i) $f(x) = 3 - 7x + x^3 - x^6 + ix^8$,

ii) die so genannte Heaviside-Funktion

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ 1 & \text{für} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Aufgabe 4 Lagrange-Polynome:

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n \in \mathbb{R}$ gegeben.
Zeigen Sie:

a) Für $k = 0, \ldots, n$ ist
$L_k(x) := \prod\limits_{i=0,\ldots,n; i \neq k} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$ ein Polynom vom Grade n mit

$$L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k. \end{cases}$$

b) Jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[x]$ ist eindeutig darstellbar als

$$p = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot L_k$$

mit passenden $c_k \in \mathbb{C}, k = 0, \ldots, n$.

Hausaufgaben:

H1:

Bestimmen Sie sämtliche komplexe Nullstellen von

$$p(x) := x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1.$$

(Hinweis: $p(i) = 0$.)

H2:

Dividieren Sie

$$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x - 6$$

durch

$$x + 2 \quad \text{mit Rest.}$$

H3:

Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegungen von

$$\frac{x^2}{x(x+1)} \quad \text{und} \quad \frac{x^5+1}{x^4+x^2}.$$

H4:
Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)},$$

und leiten Sie daraus eine Formel her für

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

H5:

a) Berechnen Sie folgende verallgemeinerte Binomialkoeffizienten:
$\binom{1/2}{4}$, $\binom{i}{3}$.

b) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$: $\binom{2n}{n} = (-1)^n \cdot 4^n \cdot \binom{-1/2}{n}$.

Zusatzaufgabe:

H6*:
Es sei $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$.
Zeigen Sie:

a) Ist $x \in \mathbb{Q}$ eine Nullstelle von f, so gilt $x \in \mathbb{Z}$.

b) Jede Nullstelle $x \in \mathbb{Z}$ ist ein Teiler von a_0.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis nutzen, dass eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$, die ein Produkt $n_1 \cdots n_k$ ganzer Zahlen teilt, mindestens ein n_l teilt.

Sprechstunde:

Prof. Dr. M. Voit: Dienstag, 11.00 - 12.30 Uhr, Raum 619

Abgabetermin: Bis Montag, 16.11.2009, 14.00 Uhr, im Briefkasten am Eingang zum Mathematik-Gebäude, der zu Ihrer Übungsgruppe gehört.