Prof. Dr. Michael Voit
Dr. A. Neuenkirch
Dipl.-Math. A. Kaplun

WS 2009/10

Analysis I

Blatt 6

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis1/ana_I_0910.html

Tutorübungen:

Aufgabe 1

Entscheiden Sie für die folgenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ob sie konvergieren, und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

a) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$ für $a \geq b \geq c > 0$;

b) $a_n = (\frac{4+3i}{5})^n$;

c) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2}$.

Aufgabe 2

Zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ heißen <u>asymptotisch gleich</u> (in Zeilen $a_n \simeq b_n$ für $n \to \infty$), falls $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ gilt.
Zeigen Sie für $n \to \infty$:

a) $n^3 \simeq n^3 + 3n^2$.

b) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \simeq \frac{1}{n^2}$.

c) Für ein Polynom $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} c_k x^k$ vom Grade $m \in \mathbb{N}$ gilt $p(n) \simeq c_m n^m$.

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (1 + 1/n)^{n+1}$ monoton fallend und beschränkt ist.
(Hinweis: Bernoulli-Ungleichung!)

b) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n$ existieren und übereinstimmen.

Aufgabe 4 Konvergenz von Mitteln:

Einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ordnet man die Folge $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Mittel mit

$$m_n := \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

zu.

a) Zeigen Sie, dass aus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{C}$ folgt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = a$ gilt.

b) Geben Sie ein Beispiel an, wo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert und $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Hausaufgaben:

H1:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\mathbb{C}$-wertige Folge, die gegen $a \in \mathbb{C}$ konvergiert. Zeigen Sie anhand der Definition der Konvergenz:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{a}_n = \bar{a}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}(a_n) = \mathrm{Re}(a)$.

H2:

Entscheiden Sie für folgende Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ob sie konvergieren, und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

a) $a_n = \frac{n^3+3n+7}{3n^3+n^2}$;

b) $a_n = \frac{x^n-n}{x^n+n}$ abhängig von $x > 0$;

c) $a_n = \sqrt[n]{n+M}$ abhängig von $M > 0$;

d) $a_n = \frac{1}{n^2} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} k$;

e) $a_n = \frac{i^n}{n+i}$;

f) $a_1 := 3$ und $a_{n+1} := 2a_n - 1$ für $n \geq 1$;

g) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

(Tipp: Es darf auf Ergebnisse früherer Blätter zurückgegriffen werden!).

H3:
Betrachten Sie die Zahlen

$$a_n = \sqrt{n+1000} - \sqrt{n}, \quad b_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}, \quad c_n = \sqrt{n + \frac{n}{1000}} - \sqrt{n}.$$

Zeigen Sie:

a) Für $1 \leq n < 10^6$ gilt $a_n > b_n > c_n$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1/2.$

c) Entscheiden Sie, ob $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

d) Bestimmen Sie b_n für $n = 10^{60}$ auf 10 Dezimalstellen.

(Hinweis: $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$ ist nützlich!).

H4: Division durch Multiplikation
Sei $c > 0$ gegeben.
Wähle einen Startwert $x_1 \in]0, 2/c[$ und definiere rekursiv

$$x_{n+1} := x_n(2 - cx_n) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

a) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\geq 2}$ monoton wächst und beschränkt ist.

b) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1/c$ gilt.

c) Für $c \in]0, 2[$ und $x_1 := 1$ überprüfe man

$$x_n = \frac{1 - (1-c)^{2^{(n-1)}}}{c} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Man vergleiche damit die relativen Abstände von x_n und x_{n+1} vom Limes $1/c$ explizit.

H5*:
Die **unendlich iterierte Wurzel**

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$

wird definiert als Limes der wie folgt rekursiv definierten Folge

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \sqrt{1 + a_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

a) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und durch 2 beschränkt ist.

b) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

H6*: Konvergenz verallgemeinerter Mittel

Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine $]0,\infty[$-wertige, streng monoton wachsende Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$. Zeigen Sie für eine konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_n} \sum_{k=1}^{n} (c_k - c_{k-1}) a_k = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Abgabetermin: Bis Montag, 23.11.2009, 14.00 Uhr, im Briefkasten am Eingang zum Mathematik-Gebäude, der zu Ihrer Übungsgruppe gehört.