Prof. Dr. Michael Voit
Dr. A. Neuenkirch
Dipl.-Math. A. Kaplun

WS 2009/10

Analysis I

Blatt 7

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis1/ana_I_0910.html

Tutorübungen:

Aufgabe 1

Zeigen Sie:

a) Für $s \in \mathbb{Q}, s \geq 2$ konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$.

b) Für $s \in \mathbb{Q}, 0 < s \leq 1$ divergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz für

a) $a_n = \frac{1}{7^n} \binom{3n}{n}$;

b) $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$;

c) $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$.

Aufgabe 3

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$a_n := b_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \quad \text{und} \quad c_n := \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}.$$

Zeigen Sie, dass die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergieren, das so genannte Cauchy-Produkt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ aber nicht.

Aufgabe 4

Entscheiden Sie für folgende Folgen, ob $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n, \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existieren, und bestimmen Sie diese Werte gegebenenfalls:

a) $a_n := \begin{cases} -(1-1/n) & \text{falls } \ n = 2^k \ \text{ für ein } \ k \in \mathbb{N}, \\ +(1-1/n) & \text{sonst.} \end{cases}$

b) $a_n = (-1)^n(1 - \frac{10}{n})$.

Aufgabe 5 Der Satz von Bolzano-Weierstraß für $\mathbb{C}$

Zeigen Sie:
Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ hat eine konvergente Teilfolge.

Hausaufgaben:

H1:
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Folge.
Zeigen Sie:

$$\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n.$$

H2:
Entscheiden Sie für folgende Folgen, ob $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n, \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existieren, und berechnen Sie diese Werte gegebenenfalls:

a) $a_n := \begin{cases} n & \text{falls } \ n \ \text{ gerade ist,} \\ \sqrt[n]{n} & \text{falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$

b) $a_n = (-1)^n \ \frac{n^2}{2^n}$.

H3:
Untersuchen Sie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz bzw. absolute Konvergenz für:

a) $a_n = (\frac{1+i}{2})^n$;

b) $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$;

c) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}$;

d) $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$;

e) $a_n = \frac{q^n}{1-q^n}$ für $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ bzw. $|q| > 1$;

f) $a_n := \begin{cases} 1/n^2 & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ 1/2^n & \text{sonst;} \end{cases}$

g) $a_n := \begin{cases} 1/n & \text{falls } n \text{ gerade ist} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

H4: Das Grenzwertkriterium

Zeigen Sie:

Es seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ Reihen mit $b_n > 0$ für $n \in \mathbb{N}$, so dass $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} =: L$ existiert mit $L \neq 0$. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert.

Untersuchen Sie mit diesem Kriterium folgende Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a+n^k}{b+n^m}$ mit $a, b \in \mathbb{R}, \quad k, m \in \mathbb{N}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(1/k+1/n)}}$ mit $k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 2$.

H5:

Bereits die Pythagoräer untersuchten den <u>Kettenbruch</u>

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}},$$

der als Limes x der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_1 := 1$ und $x_{n+1} := 1 + \frac{1}{x_n}$ definiert ist.
Zeigen Sie, dass der Limes existiert, und bestimmen Sie x!
(Hinweis: Die Folgen $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sind monoton!!)

Abgabetermin: Bis Montag, 30.11.2009, 14.00 Uhr, im Briefkasten am Eingang zum Mathematik-Gebäude, der zu Ihrer Übungsgruppe gehört.