Prof. Dr. Michael Voit
Dr. A. Neuenkirch
Dipl.-Math. A. Kaplun

WS 2009/10

Analysis I

Blatt 8

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis1/ana_I_0910.html

Tutorübungen:

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ überabzählbar ist. Entscheiden Sie, ob die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ auch überabzählbar ist.

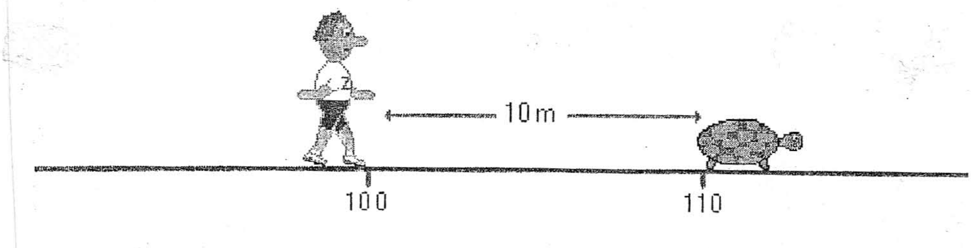
Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Dualbruchentwicklung $\sum_{n=1}^{\infty} z_n \cdot \frac{1}{2^n}$ mit $z_n \in \{0,1\}$ der Dezimalzahl $0,8$.

Aufgabe 3 Achill und die Schildkröte

Der griechische Philosoph Zenon von Elea (um 450 v. Chr.) begründete wie folgt, dass der schnelle Achill nie eine langsame Schildkröte im Wettlauf einholen kann, wenn er ihr anfangs einen Vorsprung lässt:

Achill, der zehnmal schneller läuft wie die Schildkröte, überlässt ihr anfangs 100 Meter Vorsprung. Hat Achill die 100 Meter überwunden, so hat er den Startpunkt der Schildkröte erreicht, doch diese ist in der Zeit 10 Meter weit gelaufen, und er hat sie damit noch nicht eingeholt. Bis Achill den erneuten Vorsprung der Schildkröte aufgeholt hat, ist diese wieder ein kleines Stück weiter, und so fort. Daher kann Achill die Schildkröte nie einholen.



Veranschaulichen Sie obiges Argument mit einer Skizze und zeigen Sie, dass Achill, die Schildkröte doch einholt.
Nach welcher Strecke hat Achill die Schildkröte erreicht, sofern er 10m/s läuft?
Wo liegt der Trugschluss von Zenon?

Aufgabe 4
Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n\; 4^n z^n$;

b) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2n}$.

Aufgabe 5
Zeigen Sie, dass für jedes $z \in \mathbb{C}$ die Reihe

$$E(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, z^n$$

absolut konvergiert. Ferner zeige man für $z, w \in \mathbb{C}$

$$E(z) \cdot E(w) = E(z + w),$$

und man bestimme $E(-1)$ bis auf einen Fehler der Ordnung 10^{-3}.

Hausaufgaben:

H1:
Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}\, z^n$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^5 \cdot z^n$;

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (a^n + b^n) z^n$ für $0 < a < b$.

H2:
Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ die Reihen

$$C(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{und} \quad S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

absolut konvergieren. Ferner zeige man für $z, w \in \mathbb{C}$:

$$S(z)\ C(w) + C(z)\ S(w) = S(w+z).$$

H3: Hypergeometrische Reihen:
Für $a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ definiert man das **Pochhammer-Symbol**

$$(a)_n := a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)$$

mit $(a)_0 = 1$.
Für Parameter $a, b, c \in \mathbb{C}$ und $c \notin \{0, -1, -2, \dots\}$ definiert man die **hypergeometrische** Reihe

$$F(a, b, c; z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n \cdot (b)_n}{(c)_n \cdot n!} z^n.$$

a) Schreiben Sie die Glieder der Potenzreihe $F(a, b, c; z)$ explizit auf für $n = 0, 1, 2, 3$.

b) Zeigen Sie, dass für a oder b aus $\{0, -1, -2, \dots\}$ die Funktion $F(a, b, c; z)$ ein Polynom in z ist. In den übrigen Fällen, d.h. $a, b \notin \{0, -1, -2, \dots\}$, bestimme man den Konvergenzradius der Potenzreihe.

c) Überprüfen Sie, ob die Binomialreihen $B_s(z)$ als Spezialfälle von hypergeometrischen Reihen der Form $F(a, b, c; \pm z)$ darstellbar sind.

H4:
Beweisen Sie, dass das Intervall $[1, 2]$ überabzählbar ist.

H5*: Algebraische und transzendente Zahlen
Eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ heißt algebraisch, falls ein Polynom
$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ mit $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}, a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $p(z) = 0$ gilt.
Nicht-algebraische Zahlen $z \in \mathbb{C}$ heißen transzendent. Zeigen Sie:

a) Die Menge A der algebraischen Zahlen ist abzählbar.

b) Es gibt transzendente Zahlen $z \in \mathbb{R}$.

(Bemerkung: Die Euler-Zahl e und die Kreiszahl π sind die berühmtesten transzendenten Zahlen).

Abgabetermin: Bis Montag, 07.12.2009, 14.00 Uhr, im Briefkasten am Eingang zum Mathematik-Gebäude, der zu Ihrer Übungsgruppe gehört.