Prof. Dr. Michael Voit
Dr. A. Neuenkirch
Dipl.-Math. A. Kaplun

WS 2009/10

Analysis I

Blatt 9

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis1/ana_I_0910.html

Tutorübungen:

Aufgabe 1 Ein Fixpunktsatz

Für $a < b \in \mathbb{R}$ sei $f : [a,b] \to [a,b]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass mindestens ein $x \in [a,b]$ existiert mit $f(x) = x$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Menge

$$M = \{i^n + 2^{-m} : m, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C}.$$

Aufgabe 3

Für $m, n \in \mathbb{N}$ berechne man

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1}.$$

Aufgabe 4

Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - (ax^2 + bx + c)) = 0?$$

Aufgabe 5

Betrachten Sie die Funktion $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ \frac{1}{m} \quad \text{für} \quad x = \frac{n}{m} & \text{mit} \quad n, m \in \mathbb{N} \quad \text{teilerfremd.} \end{cases}$$

a) f ist unstetig in jedem $x \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty[$;

b) f ist stetig in jedem $x \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cap [0, \infty[$.

Hausaufgaben:

H1:
Berechnen Sie:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+3x^2+3x-7}{x^2-3x+2}$ (Tipp: 1 ist gemeinsame Nullstelle!).

b) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x+2} - x)$.

H2:
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}.$$

a) Skizzieren Sie den Graphen von f.

b) Entscheiden Sie, ob f auf $\mathbb{R}$ stetig ist, und beweisen Sie Ihre Aussage.

H3:
Betrachte die Funktion $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^3+x+2}.$$

a) Begründen Sie, dass f auf $[1, \infty[$ stetig ist mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

b) Argumentieren Sie mit Satz 9.12 aus der Vorlesung, dass f auf $[1, \infty[$ ein Maximum annimmt.
(Differenzieren ist nicht erlaubt!).

H4:
Es sei $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Zeigen Sie anhand des $\epsilon - \delta-$Kriteriums, dass die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x \cdot g(x)$ in 0 stetig ist.

H5:
Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1)$.
Zeigen Sie, dass ein $x \in [0, 1/2]$ existiert mit $f(x) = f(x + 1/2)$.
(Hinweis: Zwischenwertsatz).

H6:**
Es sei $p \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom geraden Grades $2n$ mit $n \in \mathbb{N}$, so dass $p(x) \geq 0$ für $x \in \mathbb{R}$ gilt.
Zeigen Sie, dass p darstellbar ist als

$$p = r^2 + s^2 \quad \text{für Polynome} \quad r, s \in \mathbb{R}[x].$$

Anleitung: Betrachten Sie die Zerlegung von p in Linearfaktoren, und führen Sie eine vollständige Induktion nach der Zahl der Nullstellen in $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\; z > 0\}$ durch.
Im Induktionsschritt kann man Hausaufgabe 6* von Blatt 4 verwenden!!

Abgabetermin: Bis Montag, 14.12.2009, 14.00 Uhr, im Briefkasten am Eingang zum Mathematik-Gebäude, der zu Ihrer Übungsgruppe gehört.