Prof. Dr. Michael Voit
Dr. A. Neuenkirch
Dipl.-Math. A. Kaplun

WS 2009/10

Analysis I

Blatt 10

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis1/ana_I_0910.html

Tutorübungen:

Aufgabe 1

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und seien $f, g : \mathbb{R}\backslash\{x_0\} \to \mathbb{C}$ Funktionen, für die die Limiten

$$a := \lim_{x\to x_0} f(x), \quad b := \lim_{x\to x_0} g(x)$$

existieren. Zeigen Sie mit den $\epsilon - \delta-$Kriterium

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b.$$

Aufgabe 2 Der Logarithmus zur Basis $a > 0$

a) Es seien $a, b > 0$. Wiederholen Sie aus § 10.11 der Vorlesung die Beweise folgender Identitäten:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \ (a^x)^y = a^{xy}, \ a^x b^x = (ab)^x.$$

b) Nun sei $a \in \mathbb{R}, a > 1$. Zeigen Sie, dass die Funktion $x \mapsto a^x$ auf $\mathbb{R}$ stetig und streng monoton ist und eine stetige Umkehrfunktion $\log_a :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ besitzt. Zeigen Sie insbesondere $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (x > 0)$.

Aufgabe 3 Hyperbolische Funktionen

Für $z \in \mathbb{C}$ definiert man
$\sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ (Sinus hyperbolicus),
$\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ (Cosinus hyperbolicus).

a) Drücken Sie $\sinh z$ und $\cosh z$ mittels der trigonometrischen Funktionen sin und cos aus.

b) Leiten Sie für $z, w \in \mathbb{C}$ folgende Additionstheoreme her:
$\cosh(z + w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w$,
$\sinh(z + w) = \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w$,
$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.

c) Entscheiden Sie, ob $\sinh z$ und $\cosh z$ gerade bzw. ungerade sind.

d) Betrachten Sie nun die hyperbolischen Funktionen auf $\mathbb{R}$ und zeigen Sie:
i) sinh ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$;
ii) cosh ist streng monoton wachsend auf $[0, \infty[$.
Fertigen Sie eine Skizze an.

e) Bestimmen Sie:
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{e^x}$ und $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$.

f) Bestimmen Sie die Potenzreihendarstellungen von $\sinh z$ und $\cosh z$.

Hausaufgaben:

H1:
Bestimmen Sie im Falle der Existenz folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$,

b) $\lim\limits_{x\downarrow 0} x \cdot \ln x$,

c) $\lim\limits_{x\downarrow 0} x^x$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1)$ (für $x > 0$).

H2:
Zeigen Sie für $z \in \mathbb{C}$ folgende Ungleichungen

$$|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z| \cdot e^{|z|}.$$

H3:

a) Bestimmen Sie Summenformeln für

$$e^z + e^{2z} + e^{3z} + \ldots + e^{nz} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

und $\cos x + \cos(2x) + \cos(3x) + \ldots + \cos(nx)$
und $\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + \ldots + \sin(nx)$ für $x \in \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$: $2\sin^2(x/2) = 1 - \cos x$.

H4:
Zeigen Sie:

a) Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $\cosh^2(\frac{z}{2}) = \frac{1}{2}(\cosh(z)z + 1)$;

b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sinh x$ besitzt eine Umkehrfunktion $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die stetig und streng monoton wachsend ist.

c) $\operatorname{arsinh} x = \ln(\sqrt{x^2+1} + x) = -\ln(\sqrt{x^2+1} - x)$.

(Hinweis: Notationen und Ergebnisse aus Tutoraufgabe 2 sollen verwendet werden!).

H5*: Bakterienwachstum
Eine Bakterienkultur der Größe $B(t)$ zur Zeit t unterliege dem Gesetz des natürlichen Wachstums mit Wachstumsrate $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}(B(t) - 1) =: a > 0$.
Bestimmen Sie die Form von $B(t)$.
Wann hat sich die Kultur verzehnfacht (abhängig von a)?

H6*:
An einem weihnachtlichen Fenster wächst eine **Eisblume** nach folgendem rekursiven Bildungsgesetz:
Die Ausgangsfigur T_0 ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Kantenlänge 1. Die Berandung von T_{n+1} entsteht aus der von T_n, indem auf dem mittleren Drittel einer jeden geradlinigen Berandungsstrecke von T_n ein gleichseitiges Dreieck aufgesetzt wird.
Man berechne den Umfang U_n und den Flächeninhalt F_n von T_n und zeige:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} F_n < \infty.$$

(Durch den Grenzprozess $n \to \infty$ erhält man ein fraktales Gebilde, bei dem die Umrandungskurve in keinem Punkt eine Tangente besitzt.)

H7*:**
Bestimmen Sie alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die der Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

genügen.

Abgabetermin: Bis Montag, 04.01.2010, 14.00 Uhr, im Briefkasten am Eingang zum Mathematik-Gebäude, der zu Ihrer Übungsgruppe gehört.