Prof. Dr. Michael Voit
Dr. A. Neuenkirch
Dipl.-Math. A. Kaplun

WS 2009/10

Analysis I

Blatt 11

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis1/ana_I_0910.html

Tutorübungen:

Aufgabe 1

Wo steckt in folgender Rechnung der Fehler:

$$0 = \ln(1) = \ln(1^{-i}) = \ln((e^{2\pi i})^{-i}) = \ln(e^{(-i)(2\pi i)}) = \ln(e^{2\pi}) = 2\pi.$$

Die Antwort ist zu begründen!

Aufgabe 2 Das kontinuierliche Cauchy-Kriterium

Es sei $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ eine Funktion, die folgendem Cauchy-Kriterium genügt:

$$(C) \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 \ \ \forall x, y > M : \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ existiert.

Aufgabe 3

Für ein beliebiges Dreieck mit den Seiten a, b, c und gegenüberliegenden Winkeln α, β, γ und dem Flächeninhalt F zeige man:

a) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2F}$ (Sinussatz)

b) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha$ (Cosinussatz)

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Polarkoordinaten von

$$1 - i, \quad (1+i)^3\ (1-i), \quad -5e^{i\pi/2}.$$

Aufgabe 5

Wo sind folgende Funktionen differenzierbar?
Berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung:

a) $f(x) = |x|^{3/2}$;

b) $f(x) = \operatorname{arsinh} x$.
Hier existieren zwei Möglichkeiten zur Berechnung;
vgl. Hausaufgabe 4c) vom Blatt 10.

Hausaufgaben:

H1:
Man leite folgende Formeln her:

a) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

b) $\sin 2x = 2 \sin x \ \cos x$

c) $\sin 3x = -4 \sin^3 x + 3 \sin x$.

Mit (c) bestimme man sin $\pi/3$ und cos $\pi/3$.

H2:
Wo sind folgende Funktionen differenzierbar? Berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitungen.

a) $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$;

b) $f(x) = 2^x \cdot \sin x$;

c) $f(x) = x^{1/x}$;

d) $f(x) = |x|^3$;

e) $f(x) = \sqrt{1+x^3}$.
(Was ist der Definitionsbereich von f?)

H3:
Es sei $x \in [0, \pi]$ eine reelle Zahl. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei L_n die Länge des Streckenzuges, der die Punkte $e^{ikx/n}(k = 0, 1, \ldots, n)$ des Einheitskreises in $\mathbb{C}$ der Reihe nach verbindet.

Man zeige:

a) $L_n = 2n \cdot \sin \frac{x}{2n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = x$.
Interpretieren Sie dieses Ergebnis geometrisch!

Tipp: Aufgabe 3b) vom Blatt 10

H4:
Zeigen Sie: Die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und f' ist in $x = 0$ unstetig.

H5*:
Für $x \in [-1, 1]$ sei $T_n(x) := \cos(n \cdot \arccos\ x)$. Man zeige, dass T_n ein Polynom vom Grade n ist mit Leitkoeffizient 2^{n-1}.
(T_n wird das n-te Tchebycheff-Polynom genannt.)

Abgabetermin: Bis Montag, 11.01.2010, 14.00 Uhr, im Briefkasten am Eingang zum Mathematik-Gebäude, der zu Ihrer Übungsgruppe gehört.