Prof. Dr. Michael Voit
Dr. A. Neuenkirch
Dipl.-Math. A. Kaplun

WS 2009/10

Analysis I

Blatt 12

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis1/ana_I_0910.html

Tutorübungen:

Aufgabe 1

Für $n \in \mathbb{N}$ beweise man die **Produktregel von Leibniz:**

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x)$$

(wobei $h^{(0)}(x) := h(x)$ per definitionem.)

Aufgabe 2

Die sogenannten **Legendre-Polynome** P_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ sind definiert als

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n\right].$$

a) Man berechne P_0, P_1, P_2, P_3 und P_4.

b) Man zeige, dass P_n ein Polynom vom Grade n ist mit n verschiedenen Nullstellen im Intervall $[-1, 1]$.
(Hinweis: n-malige Anwendung des Satzes von Rolle)

c) Es gilt: Das Legendre-Polynom P_n genügt der Legendreschen Differentialgleichung

$$(1-x^2)\ P_n'(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

(Tipp: Die Funktion $(x^2-1)[(x^2-1)^n]' - 2nx(x^2-1)^n$ ist $(n+1)-$mal mit der Leibnizregel abzuleiten.)

Aufgabe 3

Eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt

i) gleichmäßig stetig auf I, falls

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in I \text{ mit } |x-y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

ii) Lipschitz-stetig auf I, falls $c \geq 0$ existiert mit:

$$\forall\ x, y \in I : \quad |f(x) - f(y)| \ \leq\ c \cdot |x-y|.$$

Zeigen Sie:

a) Ist f auf I Lipschitz-stetig, so ist f auf I gleichmäßig stetig;

b) Ist f auf I geichmäßig stetig, so ist f auf I stetig;

c) Ist f auf $I = [a, b]$ stetig differenzierbar, so ist f auf I Lipschitz-stetig.

Hausaufgaben:

H1:

Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

a) $f(x) = \ln(\sin^5 x \cdot \cos^7 x)$.

b) $f(x) = \arccos x$.

H2:

Bestimmen Sie:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x/2)}{1-\cos x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to \pi/2} (x - \frac{\pi}{2}) \cdot \tan x$.

H3:
Für n vorgegebene Zahlen $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ bestimme man die globalen Minima folgender Funktionen

a) $f(x) := (\sum\limits_{i=1}^{n}(x - a_i)^2)^{1/2}$

b) $g(x) := \sum\limits_{i=1}^{n} |x - a_i|$
(Hinweis: Welche Ableitung hat g für $x \in]a_i, a_{i+1}[$?)

H4:
Zeigen Sie, dass $f(x) := e^{-x^2/2}$ der Differentialgleichung

$$(D) \quad f'(x) = -x \cdot f(x)$$

mit $f(0) = 1$ genügt. Zeigen Sie auch umgekehrt, dass jede differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 1$, die (D) genügt, der Beziehung $f(x) = e^{-x^2/2}$ für $x \in \mathbb{R}$ genügt.

H5:

a) Betrachten Sie ein Rechteck mit Seitenlängen $a, b \geq 0$ und festem Umfang 1. Bestimmen Sie a, b so, dass der Inhalt des Rechtecks maximal ist.

b) Eine zylindrische Getränkedose mit vorgegebenem Volumen V soll aus 2 kreisförmigen Kreisen mit Radius r und Fläche $r^2\pi$ und einem Mantel der Höhe h hergestellt werden.
Bestimmen Sie h und r so, dass der Materialverbrauch minimal ist.

Abgabetermin: Bis Montag, 18.01.2010, 14.00 Uhr, im Briefkasten am Eingang zum Mathematik-Gebäude, der zu Ihrer Übungsgruppe gehört.

Informationen zur Klausur Analysis I im WS 2009/2010

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis1/klausurinfo.html