Prof. Dr. Michael Voit
Dr. A. Neuenkirch
Dipl.-Math. A. Kaplun

WS 2009/10

Analysis I

Blatt 13

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis1/ana_I_0910.html

Tutorübungen:

Aufgabe 1

Fortsetzung von Aufgabe 3 vom Blatt 12:
Geben Sie Beispiele für Funktionen f mit folgenden Eigenschaften:

a) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist stetig, aber nicht Lipschitz-stetig.

b) $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

c) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig und differenzierbar, aber f' ist nicht stetig auf $[0,1]$.

Aufgabe 2

Betrachten Sie auf $\mathbb{R}^2$ die $p-$Normen mit $p \in [1,\infty]$ und

$$\|(x_1,x_2)\|_p := \begin{cases} (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}, & p < \infty \\ \max(|x_1|,|x_2|), & p = \infty \end{cases}$$

a) Zeigen Sie für $\quad x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

b) Skizzieren Sie die Einheitskugeln

$$B_p := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p \leq 1\} \quad \text{für} \quad p = 1,2,\infty.$$

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Funktionen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) := nxe^{-nx^2} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Bestimmen Sie den punktweisen Limes f der f_n.

b) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Intervallen $[a,b]$ mit $0 \in [a,b]$ nicht gleichmäßig gegen f konvergiert.

c) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Intervallen $[a,b]$ mit $0 \notin [a,b]$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Aufgabe 4

Betrachten Sie die Reihe $f(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin nx \quad (x \in \mathbb{R})$.

a) Entscheiden Sie, ob die Reihe eine Potenzreihe ist.

b) Zeigen Sie, dass die Reihe gleichmäßig konvergiert, und dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

c) Berechnen Sie f explizit.
(Tipp: Darstellung des Sinus durch Exponential-Funktionen!).

Hausaufgaben:

H1:
Untersuchen Sie die Funktionen

$$f(x) = \sin x \quad \text{und} \quad g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 7$$

auf die Bereiche, wo f monoton fallend bzw. steigend oder konvex bzw. konkav ist. Wo sind die Wendepunkte?

H2:
Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle und $f : I \to J$ eine bijektive konvexe Funktion.
Entscheiden Sie anhand einer Skizze, ob f^{-1} konvex oder konkav ist, oder ob beides möglich ist.
Beweisen Sie anschließend gegebenenfalls Ihre Vermutung bzgl. Konvexität bzw. Konkavität von f^{-1}.

H3:
Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine auf dem Intervall I differenzierbare Funktion mit $f'(x) \geq 0$ für $x \in I$.
Zeigen Sie:
f ist auf I streng monoton wachsend genau dann, wenn auf keinem offenen Teilintervall $\emptyset \neq]a,b[\subset I$ die Ableitung f' identisch verschwindet.

H4:
Betrachten Sie die Funktionen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Bestimmen Sie den punktweisen Limes f der f_n.

b) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ nicht gleichmäßig gegen f konvergiert. (Fertigen Sie dazu Skizzen von f_n an!)

c) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[a,1]$ gleichmäßig gegen f konvergiert für jedes $a \in]0,1[$.

H5:
Es sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion.

a) Zeigen Sie für $x_1, \ldots, x_n \in I$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$, dass gilt:

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n).$$

(Tipp: Induktion nach $n \geq 2$!)

b) Zeigen Sie, dass $f(x) = -\ln x$ konvex auf $]0,\infty[$ ist, und folgern Sie daraus mit a):

$$\frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n) \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Abgabetermin: Bis Montag, 25.01.2010, 14.00 Uhr, im Briefkasten am Eingang zum Mathematik-Gebäude, der zu Ihrer Übungsgruppe gehört.

Informationen zur Klausur Analysis I im WS 2009/2010

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis1/klausurinfo.html