Prof. Dr. Michael Voit
Dr. A. Neuenkirch
Dipl.-Math. A. Kaplun

WS 2009/10

Analysis I

Blatt 14

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis1/ana_I_0910.html

Tutorübungen:

Aufgabe 1

Konstruieren Sie eine Regelfunktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit unendlich vielen Unstetigkeitsstellen.

Aufgabe 2

Sei $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ eine gerade bzw. ungerade Regelfunktion.

a) Zeigen Sie, dass es gerade bzw. ungerade Treppenfunktionen $f_n : [-a, a] \to \mathbb{R}$ gilt, die gleichmäßig gegen f konvergieren.

b) Was lässt sich über $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx$ für gerade bzw. ungerade Regelfunktionen f aussagen?

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition, dass $f(x) = 1/x$ auf $[1, 2]$ eine Regelfunktion ist.

b) Zeigen Sie unter Benutzung von $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = \ln\ 2$:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} \right) = \ln\ 2.$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie $f'(x)$ für
$$f(x) = \arctan x$$
und
$$f(x) = \operatorname{arctanh}\, x.$$

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Stammfunktionen zu folgenden Funktionen

a) $f(x) = xe^{x^2}$.

b) $f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad (x > 1)$.

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}, \quad (|x| < 1/\sqrt{2})$.

d) $f(x) = \frac{1}{1+x^4} \cdot x$.

Hausaufgaben:

H1: Berechnung von Integralen über Riemannsummen

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = e^{2x}$ auf $[0, 1]$.

a) Begründen Sie, dass f eine Regelfunktion ist;

b) Zeigen Sie, dass die Treppenfunktionen

$$f_n(x) = \begin{cases} e^{\frac{2k}{n}}, & x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \\ e^2, & x = 1 \end{cases}$$

gleichmäßig gegen f konvergieren;

c) Bestimmen Sie $\int_0^1 f_n(x)\, dx$;

d) Bestimmen Sie mithilfe von b) und c)

$$\int_0^1 f(x)\, dx.$$

H2:
Bestimmen Sie die Funktionen f mit:

a) $f'(x) = 2x\sin(x^2)$;

b) $f'(x) = \frac{1}{x+2}$;

c) $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$;
(Tipp: Partialbruchzerlegung).

d) $f'(x) = \sin(\sin x) \cdot \cos x$.

H3: Rechenregeln für gleichmäßige Konvergenz
Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, und es seien $f, g, f_n, g_n : I \to \mathbb{C}$ Funktionen.
Zeigen Sie:

a) Konvergieren $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f bzw. g, dann konvergiert $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $(f+g)$.

b) Für beschränkte Funktionen f, g gilt:
$\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$ („Submultiplikativität").

c) Sind die f_n und g_n beschränkt, so sind auch f und g beschränkt, und die gleichmäßige Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f bzw. g impliziert, dass $(f_n \cdot g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f \cdot g$ konvergiert.

d) Konstruieren Sie für $I =]0,1[$ und $f(x) := x$ Beispiele von Funktionen $f_n :]0,1[\to \mathbb{R}$, wo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, aber $(f_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig gegen f^2 konvergiert.

H4: Fibonacci-Zahlen
Die Fibonacci-Zahlen sind rekursiv definiert durch

$$a_0 := a_1 := 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} := a_n + a_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie:

a) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq a_{n+1} \leq 2a_n$.

b) Der Konvergenzradius R der Reihe $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ genügt $R \geq 1/2$, und es gilt $(1 - x - x^2) \cdot f(x) = 1$ für $|x| < 1/2$.

c) $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right) \quad (n \in \mathbb{N})$.

(Tipp: Partialbruchzerlegung von f!).
Bestimmen Sie hiermit R.

Abgabetermin: Bis Montag, 01.01.2010, 14.00 Uhr, im Briefkasten am Eingang zum Mathematik-Gebäude, der zu Ihrer Übungsgruppe gehört.

Informationen zur Klausur Analysis I im WS 2009/2010

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis1/klausurinfo.html