Prof. Dr. Michael Voit
Dr. A. Neuenkirch
Dipl.-Math. A. Kaplun

WS 2009/10

Analysis I

Blatt 15

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis1/ana_I_0910.html

Tutorübungen:

Aufgabe 1

a) Folgern Sie aus

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

folgende Identität:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \; x^{2n+1} \quad (x \in]-1,1[).$$

b) Zeigen Sie: $\pi/4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie Stammfunktionen folgender Funktionen:

a) $f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x < 1;$

b) $f(x) = \frac{x^3}{1+x^4}, \quad x \in \mathbb{R};$

c) $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}, \quad x > -1;$

d) $f(x) = \ln(x+1), \quad x > -1.$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie:

a) $\int \sqrt{1-x^2}\ dx$ für $x \in]-1,1[$.
(Tipp: Partielle Integration von $\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}$!)

b) $\int \sqrt{x^2-1}\ dx$ für $x > 1$.

Aufgabe 4

Man berechne in Abhängigkeit von $x \in [-1,1]$ den Flächeninhalt des rechts stehenden schraffierten Sektors im Einheitskreis.

Präsenzübungen:

H1:

Bestimmen Sie:

a) $\int \cos^5 x \cdot \sin x\ dx$

b) $\int \frac{1}{x^2+ax+b}\ dx$
abhängig von $a, b, \in \mathbb{R}$, so dass der Nenner keine Nullstelle in $\mathbb{R}$ hat.
(Tipp: Bringen Sie den Nenner auf die Form $(x+c)^2 + d$!).

H2:

Zeigen Sie:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\ dt = \pi$$

(Tipp: Substitution $x = 2t - 1$.)

H3:
Für $p, q \in \mathbb{N}$ berechne man $\int_0^1 \ x^p(1-x)^q \ dx$

a) mittels sukzessiver partieller Integration;

b) mit der Binomischen Formel.

Folgern Sie aus a) und b) eine Summenformel. Kennen Sie alternative Beweise für diese Formel?

Ferienaufgaben:

Folgende Aufgaben sind freiwillig, wir legen Ihnen aber eine Bearbeitung dringend ans Herz. Die Aufgaben können in der ersten Vorlesungsstunde des Sommersemesters zur Analysis II zur Korrektur abgegeben werden. Sie erhalten damit Zusatzpunkte im Sommersemester.

Aufgabe 1:
Man berechne in Abhängigkeit von $x > 1$ den Flächeninhalt des rechts stehenden schraffierten Hyperbelsektors der Hyperbel $y^2 = x^2 - 1$.

Aufgabe 2: Die Riemannsche ζ-Funktion
Zeigen Sie mit geeigneten Kriterien für gleichmäßige Konvergenz, dass

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

auf $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re } s > 1\}$ eine stetige Funktion definiert.

Aufgabe 3:
Für $k \in \mathbb{Z}$ berechne man $\int_0^{2\pi} e^{ikx}\, dx$, und folgere hieraus:

a) $\int_0^{\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx)\, dx = 0 \quad \text{für} \quad n, m \in \mathbb{N}_0, m \neq n.$

b) Für die Tchebychef-Polynome T_n von H5, Blatt 11 gilt:

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)\, T_m(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 0 \quad \text{für} \quad n, m \in \mathbb{N}_0,\ m \neq n.$$

Aufgabe 4: Entscheiden Sie, ob die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \qquad x \in [1,2] \quad \text{irrational} \\ 1/q & \text{für} \quad x = p/q \in [1,2] \quad \text{mit teilerfremden} \quad p, q \in \mathbb{N} \end{cases}$$

auf $[1,2]$ eine Regelfunktion ist.

Aufgabe 5:
Seien $a, b > 0$.
Skizzieren Sie die Ellipse

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$

und berechnen Sie ihren Flächeninhalt.

Informationen zur Klausur Analysis I im WS 2009/2010

Homepage:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsiv/analysis1/klausurinfo.html

Wir wünschen Ihnen schöne Ferien
und eine erfolgreiche Klausur!