Übungsblatt 1 15.10.2009

Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2009/10

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. M. Lenzinger

Mit * gekennzeichnete Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten; Abgabe am Donnerstag, 22.10.09 in der Vorlesung bzw. in die Briefkästen der Übungsleiter. Die übrigen Aufgaben werden am Montag, 19.10.09 in der Übung besprochen.

*1) Berechnen von Integralen.

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \sin(2x)\,dx$

2) Integration im $\mathbb{R}^n$.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische positiv definite Matrix. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^T Ax} dx = \int_{\mathbb{R}} \ldots \int_{\mathbb{R}} e^{-x^T Ax}\, dx_1 \ldots dx_n.$$

*3) Punktweise Konvergenz und Riemann-Integral.

Finden Sie Funktionenfolgen f_k, $k \in \mathbb{N}$, und Funktionen f mit den nachfolgenden Eigenschaften:

(a) $f_k, f : (0,1) \to \mathbb{R}$ stetig, $f_k(x) \nearrow f(x)$ für $k \to \infty$ für alle $x \in (0,1)$, so dass f_k integrierbar ist für alle $k \in \mathbb{N}$, aber das (uneigentliche) Integral $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ nicht existiert.

(b) $f_k, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $|f_k| \leq 1$, $f_k(x) \to f(x)$ für $k \to \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so dass das (uneigentliche) Integral $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_k(x)dx = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$, aber $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 0$.

(c) $f_k, f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, $f_k(x) \to f(x)$ für $k \to \infty$ für alle $x \in [0,1]$, so dass $\displaystyle\int_0^1 f_k(x)dx = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$, aber $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 0$.

*4) Jordan-Inhalt.

Seien M und N beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{dist}(M,N) := \inf\{|x-y| : x \in M, y \in N\} > 0$. Zeigen Sie für den Jordan-Inhalt:

$$|M \cup N|_i = |M|_i + |N|_i, \qquad |M \cup N|_a = |M|_a + |N|_a.$$

5) Äußeres Maß.

Definition. Sei $\mathcal{P}(X)$ das System aller Teilmengen von X. Eine Funktion $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ heisst *äußeres Maß* auf X, wenn für $A, B, A_1, A_2, ... \subset X$ gilt:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$
2. $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (Monotonie)
3. $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$ (σ-Subadditivität).

(a) Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ äußere Maße sind:

(i) $\mu^*(\emptyset) := 0$ und $\mu^*(A) := 1$ für $\emptyset \neq A \subset X$.

(ii) $\mu^*(A) := 0,$ falls A abzählbar und $\mu^*(A) := 1,$ falls A überabzählbar .

(b) Zeigen Sie: Jede endliche oder unendliche Summe $\sum_{k\geq 1} \mu_k^*$ äußerer Maße auf $\mathcal{P}(X)$ ist wieder ein äußeres Maß.

*(c) Wir definieren die Abbildung $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$, so dass $\mu^*(\emptyset) = 0$ und für $M \neq \emptyset$:

$$\mu^*(M) := \sup\{|x_i - y_i|, i = 1, ..., n,\ x, y \in M\}.$$

Ist μ^* ein äußeres Maß ?
