Übungsblatt 2 22.10.2009

Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2009/10

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. M. Lenzinger

1) σ-Algebra.

Definition. Ein (nichtleeres) System $\mathcal{A}$ von Teilmengen einer Menge X heisst *σ-Algebra*, wenn folgendes gilt:

1. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$
2. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$
3. $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}, A_i$ paarweise disjunkt $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

(a) Welche der folgenden Systeme von Teilmengen sind σ-Algebren ?

(i) $\mathcal{A}_1 := \{A \subset X : A \text{ oder } A^c \text{ ist endlich}\}$

(ii) $\mathcal{A}_2 := \{A \subset X : A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}$

(b) Sei $A \subset X$. Beschreiben Sie die kleinste σ-Algebra $\sigma(A)$, welche die Menge A enthält. (Man sagt auch: $\sigma(A)$ ist die von A erzeugte σ-Algebra.)

(c) Seien X, Y Mengen und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Y. Sei $T : X \to Y$ eine Abbildung. Zeige, dass $\mathcal{B} := \{T^{-1}(B) : B \in \mathcal{A}\}$ eine σ-Algebra auf X ist.

2) Zählmaß.

Sei X eine Menge und $\mathcal{A} := \mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge. Zu $A \in \mathcal{A}$ definiere

$$\mu(A) := \begin{cases} \text{Anzahl der Elemente von } A, & \text{falls } A \text{ endlich,} \\ \infty, & \text{falls } A \text{ unendlich viele Elemente besitzt.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum ist.

3) Wahrscheinlichkeit.

Folgendes Zufallsexperiment wird durchgeführt: Zunächst wird eine Münze geworfen. Zeigt sie "Zahl", so wird der Variablen ω der Wert $\frac{1}{4}$ zugeordnet. Zeigt die Münze "Kopf", so wird mittels eines Zufallszahlengenerators eine Zufallszahl in $[0,1]$ bestimmt und ω gleich dieser Zahl gesetzt. Wir wollen den möglichen Werten von ω nun eine Wahrscheinlichkeit P zuordnen.

(a) Warum gibt es keine Abbildung $P : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\int_0^1 P(\omega)d\omega = 1$, die jedem ω seine Wahrscheinlichkeit zuordnet ?

(b) Finden Sie eine Abbildung $P : \{(a,b) : 0 \leq a \leq b \leq 1\} \subset \mathcal{P}([0,1]) \to \mathbb{R}$, $(a,b) \mapsto P((a,b))$, so dass mit Wahrscheinlichkeit $P((a,b))$ das Ereignis $\omega \in (a,b)$ eintritt.

4) Cantor-Menge.

Sei $G_1 = [0,1]$. Man schneide das offene Teilintervall der Länge $1/3$ in der Mitte heraus und nenne die neue Menge $G_2 := G_1 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Man entferne dann jeweils ein $(1/3)^2$ langes offenes Teilintervall aus der Mitte der zwei neuen Intervalle, aus denen G_2 besteht, und bezeichne die neue Menge mit G_3. Wenn man dieses Verfahren unendlich oft mit offenen Teilintervallen der Länge $(\frac{1}{3})^n$ in allen neuen Intervallen wiederholt, so bekommt man die sogenannte Cantor-Menge $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$.

(a) Untersuchen Sie, ob C Jordan-messbar ist.

(b) Zeigen Sie: C ist Lebesgue-messbar und berechnen Sie das Lebesgue-Maß $\lambda(C)$.

(c) Zeigen Sie: $C = \partial C$, d.h. C besitzt keine inneren Punkte.

Anmerkung: Die Cantor-Menge ist überabzählbar. Man kann sogar zeigen, dass es eine bijektive Abbildung von C auf das Intervall $[0,1]$ gibt.

Abgabe am Donnerstag, 29.10.09.

Aktuelle Übungsblätter auf
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsi/schweizer/uebungen-ana3-2009.html`