Übungsblatt 3 29.10.2009

Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2009/10

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. M. Lenzinger

1) Messbare Funktionen.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar und sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, die fast überall auf Ω von Null verschieden ist. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{f(x)}, & \text{falls } f(x) \neq 0, \\ \text{beliebig}, & \text{falls } f(x) = 0, \end{cases}$$

ebenfalls messbar ist.

2) Dirac-Maß.

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fest. Das Dirac-Maß δ_{x_0} wird definiert durch

$$\delta_{x_0}(M) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x_0 \in M, \\ 0, & \text{falls } x_0 \notin M. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass δ_{x_0} ein Maß auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ist.

(b) Geben Sie alle bzgl. des Dirac-Maßes $\mu := \delta_{x_0}$ messbaren Mengen, messbaren Funktionen und messbaren Treppenfunktionen an. Berechnen Sie das Integral $\int_\Omega f d\mu$ mit Hilfe der Definitionen aus der Vorlesung durch Übertragung auf das Maß μ.

3) Cantor-Funktion.

Die Cantor-Menge (vgl. Übungsblatt 2) ist gegeben durch $C := \cap_{n=1}^\infty C_n$, wobei $C_0 = [0, 1]$ und C_n eine disjunkte Vereinigung von 2^n Intervallen der Länge 3^{-n}

ist, die aus den Intervallen von C_{n-1} durch Entfernen der offenen mittleren Drittel entstehen. Dazu definieren wir für $x \in [0,1]$ die Funktionen

$$F_n(x) := \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_0^x \chi_{C_n}(x)dx.$$

Hierbei bezeichnet χ_{C_n} die *charakteristische Funktion* der Menge C_n, d.h.

$$\chi_{C_n}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in C_n, \\ 0, & \text{falls } x \notin C_n. \end{cases}$$

(a) Zeichnen Sie die ersten drei Funktionen F_n.

(b) Zeigen Sie, dass der Limes $F(x) := \lim_{n\to\infty} F_n(x)$ existiert und dass F stetig und monoton wachsend ist.

(c) Zeigen Sie: $F'(x) = 0$ für alle $x \in [0,1] \setminus C$.

Anmerkung: Es gilt ausserdem $F(C) = [0,1]$, d.h. die Cantor-Funktion bildet die Nullmenge (!) C stetig auf das Intervall $[0,1]$ ab.

Abgabe am Donnerstag, 05.11.09.

Aktuelle Übungsblätter auf
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsi/schweizer/uebungen-ana3-2009.html`