Übungsblatt 4 05.11.2009

Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2009/10

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. M. Lenzinger

1) Nicht-messbare Menge.

In $\mathbb{R}$ wird durch $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ eine Äquivalenzrelation definiert. Die zugehörigen Klassen sind die Mengen $a + \mathbb{Q}$ mit $a \in \mathbb{R}$, und es ist $a + \mathbb{Q} = b + \mathbb{Q} \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Q}$. Sei $A \subset [0, 1]$ eine Menge, die aus jeder Äquivalenzklasse genau einen Vertreter enthält (hierzu braucht man das Auswahlaxiom).

Zeigen Sie:

(a) $(r + A) \cap (s + A) = \emptyset$ für $r, s \in \mathbb{Q}$, $r \neq s$.

(b) Für $S := \bigcup\{r + A : |r| \leq 1, r \in \mathbb{Q}\}$ gilt $[0, 1] \subset S \subset [-1, 2]$.

(c) A ist nicht messbar.

2) Eigenschaften von L^1-Funktionen.

(a) Zu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei $f \in L^1(\Omega)$. Zeigen Sie (*aus Bemerkung 2.9*):

(i) Für eine beliebige Familie von messbaren Mengen $\Omega_l \subset \Omega$ mit $|\Omega_l| \to 0$ gilt $\displaystyle\int_{\Omega_l} |f| \to 0$.

(ii) Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $\Omega_0 \subset \Omega$, $|\Omega_0| < \infty$, so dass $\displaystyle\int_{\Omega \setminus \Omega_0} |f| < \varepsilon$.

(b) Folgern Sie, dass

$$\int_\Omega f = \sum_l \int_{\Omega_l} f$$

für $\Omega = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \Omega_l$, Ω_l messbar und paarweise disjunkt (*aus Satz 2.8*).

3) Konvergenzsätze.

Überprüfen Sie jeweils, welche Voraussetzungen der Sätze von Beppo Levi und Lebesgue sowie des Lemmas von Fatou erfüllt werden und welche nicht. Geben Sie jeweils den punktweisen Limes $f : \Omega \to \mathbb{R}$ an.

(a) Sei $\Omega := [0,1]$ und r_j eine Abzählung der rationalen Zahlen in Ω. Sei $f_k : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_k(r_j) = 1$ für $j = 1, ..., k$ und $f_k(x) = 0$ sonst.

(b) Sei $\Omega := \mathbb{R}$ und $f_k : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_k(x) := \frac{1}{k}$ für $-k \leq x \leq k$ und $f(x) = 0$ sonst.

(c) Sei $\Omega := [0,1]$ und $f_k : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_k(x) := k$ für $0 < x < \frac{1}{k}$ und $f_k(x) = 0$ sonst.

4) Variante der majorisierten Konvergenz.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Sei (f_k) eine Folge messbarer Funktionen auf Ω, die fast überall gegen f konvergiert. Desweiteren gelte $|f(x)| \leq g(x)$ für fast alle $x \in \Omega$ mit einer integrierbaren Funktion $g : \Omega \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f integrierbar ist.

Abgabe am Donnerstag, 12.11.09.

Aktuelle Übungsblätter auf
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsi/schweizer/uebungen-ana3-2009.html`