Übungsblatt 5 12.11.2009

Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2009/10

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. M. Lenzinger

1) Mittelwert.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $f \in L^1(\Omega)$ und stetig in einem Punkt $\xi \in \Omega$. Sei $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Teilmengen von Ω mit positivem Inhalt $\lambda^n(\Omega_j)$, die sich auf ξ zusammenzieht, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $j_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\Omega_j \subset B_\varepsilon(\xi)$ für alle $j \geq j_0$. Zeigen Sie:

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{\lambda^n(\Omega_j)} \int_{\Omega_j} f(x)dx = f(\xi).$$

2) Prinzip von Cavalieri.

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ sowie das Volumen des Ellipsoids $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ $(a, b, c > 0)$.

3) Satz von Fubini.

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_{I_1} \frac{1}{(x+y)^2} dxdy$ mit $I_1 := [1,2] \times [3,4]$

(b) $\displaystyle\int_{I_2} \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dxdy$ mit $I_2 := [0,1] \times [0,1]$

(c) $\displaystyle\int_{\Omega} \frac{\sin x}{x} dxdy$ mit $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ 0 \leq y \leq x\}$

4) Ein Gegenbeispiel.

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{1}{y^2} & \text{für } 0 < x < y \leq 1 \\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{für } 0 < y < x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx \right) dy$ und $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy \right) dx$.

Abgabe am Donnerstag, 19.11.09.

Aktuelle Übungsblätter auf
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsi/schweizer/uebungen-ana3-2009.html`