Übungsblatt 6 19.11.2009

Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2009/10

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. M. Lenzinger

1) Eine Anwendung von Fubini und Transformationssatz.

(a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

unter Verwendung von Polarkoordinaten.

(b) Berechnen Sie unter Verwendung von (a) den Wert des Integrals $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$.

2) Volumenberechnung.

Sei $R > 0$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ die Menge

$$\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ x^2 + y^2 \leq z^2,\ z \geq 0\}.$$

Skizzieren Sie die Menge Ω und berechnen Sie das Volumen mit Hilfe der *Kugelkoordinaten* $(x, y, z) = (r \cos\varphi \sin\theta, r \sin\varphi \sin\theta, r \cos\theta)$.

3) Rotationssymmetrie.

Sei $B = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ eine Kugel vom Radius R, seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, für die gilt: Ist $\|x\| = \|y\|$, dann ist $f(x) = f(y)$ und $g(x) = g(y)$, d.h. die Funktionen f und g sind rotationssymmetrisch.

Zeigen Sie, dass die Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) := \int_B f(\xi)g(\xi - x)d\xi$ (*Faltung*) ebenfalls rotationssymmetrisch ist.

4) L^p-Norm für $p \to \infty$.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $0 < |\Omega| < \infty$. Für messbare Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $1 \leq p < \infty$ sei

$$\phi_p(f) := \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p} = |\Omega|^{-1/p} \, \|f\|_{L^p} \in [0, \infty].$$

Zeigen Sie: Die Abbildung $p \mapsto \phi_p(f)$ ist monoton wachsend und es gilt

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \phi_p(f) = \lim_{p \to \infty} \|f\|_{L^p}.$$

Hierbei ist $\|f\|_\infty := \sup_{\Omega \setminus N} |f(x)|$ für eine Nullmenge $N \subset \Omega$.

Abgabe am Donnerstag, 26.11.09.

Aktuelle Übungsblätter auf
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsi/schweizer/uebungen-ana3-2009.html`