Übungsblatt 7 26.11.2009

Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2009/10

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. M. Lenzinger

1) Hilberträume.

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ heisst *Sesquilinearform*, falls für $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in X$ und für $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

(i) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \qquad \langle x, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle,$

(ii) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle, \qquad \langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle.$

Die Sesquilinearform heisst *symmetrisch*, wenn für $x, y \in X$ gilt

(iii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

und *positiv definit*, wenn für $x \in X$

(iv) $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0.$

Eine positiv definite symmetrische Sesquilinearform heisst *Skalarprodukt*.

(a) Zeigen Sie, dass durch $\langle u, v \rangle = \displaystyle\int_\Omega u(x)\bar{v}(x)dx$ ein Skalarprodukt auf $L^2(\Omega, \mathbb{K})$ definiert wird.

(b) Zeigen Sie für $u, v \in L^2(\Omega, \mathbb{K})$ die *Parallelogrammidentität*:

$$\|u+v\|_{L^2}^2 + \|u-v\|_{L^2}^2 = 2\left(\|u\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2\right)$$

2) Funktionen in L^p.

Sei $1 \leq p < \infty$. Zu $\alpha \in \mathbb{R}$ definiere $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) := \|x\|^\alpha$.

(a) Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion f in $L^p(\Omega)$, $\Omega := B_R(0) \setminus \{0\}$ ist.

(b) Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion f in $L^p(\Omega)$, $\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$ ist.

(c) Sei $1 \leq p < q < \infty$ und $\Omega := B_R(0) \setminus \{0\}$. Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion f in $L^p(\Omega)$ aber nicht in $L^q(\Omega)$ ist.

3) Konvergenz in L^p.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie:

(a) Zu jeder Cauchy-Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $L^p(\Omega)$ gibt es eine Teilfolge $(f_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ und ein $f \in L^p(\Omega)$, so dass $f_{k_l} \to f$ punktweise fast überall.

(b) Konvergiert die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $L^p(\Omega)$ gegen $f \in L^p(\Omega)$, so existiert eine Teilfolge $(f_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$, die punktweise fast überall gegen f konvergiert.

(c) Auf die Auswahl einer Teilfolge in (b) kann i.a. nicht verzichtet werden.

(d) Es gibt beschränkte Folgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $L^p(\Omega)$, die keine punktweise (fast überall) konvergente Teilfolge besitzen.

Abgabe am Donnerstag, 03.12.09.

Aktuelle Übungsblätter auf
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsi/schweizer/uebungen-ana3-2009.html`