Übungsblatt 8 03.12.2009

Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2009/10

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. M. Lenzinger

1) Konvergenz in L^1.

Sei $I_k := \left(\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge von Intervallen und $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := a_k$ für $x \in I_k$.

(a) Zeigen Sie mit präziser Argumentation, dass für $a_k = \frac{3^k}{2^k}$ die Funktion $f \in L^1((0,1))$ ist und berechnen Sie $\int_0^1 f(x)dx$.

(b) Sei $a_0 = 2$ und es gelte $|a_{k+1}|I_{k+1}| + a_k|I_k|| \leq 2^{-(k+2)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dies bedeutet, dass sich der Flächeninhalt der aufeinanderfolgenden "Balken" immer weiter annähert. Zeigen Sie, dass f nicht in $L^1((0,1))$ ist.

(c) Geben Sie eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k \to 0$ an, so dass $\int_{x_k}^1 f = 0$ für alle x_k.

2) Projektionen.

Sei H ein Hilbertraum, $P : H \to H$ linear mit $P^2 = P$ und $\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle$ für alle $x, y \in H$. Zeigen Sie: $V :=$ Bild P ist ein abgeschlossener Teilraum von H und P ist die orthogonale Projektion auf V (*Satz 4.4*).

3) Abstand im Banachraum.

Wir wollen zeigen, dass in Banachräumen i.a. keine Projektion auf abgeschlossene Teilräume existiert. Dazu sei $X := \{u \in C^0([0,1]) : u(0) = 0\}$ mit der Supremumsnorm $\|u\|_X := \|u\|_\infty$ und $V := \{u \in X : \int_0^1 u(x)dx = 0\}$.

(a) Zeigen Sie: X ist ein Banachraum und V ist ein echter abgeschlossener Teilraum von X.

Sei $u \in X$ fest gewählt. Wir bestimmen nun den Abstand von u zum Teilraum V.

(b) Zu $w_n(x) := (1 + \frac{1}{n})x^{1/n}$ betrachte die Funktionenfolge

$$v_n := u - \left(\int_0^1 u \right) w_n.$$

Zeigen Sie, dass $v_n \in V$ und

$$\|u - v_n\|_\infty \to \left| \int_0^1 u(x)dx \right|.$$

(c) Folgern Sie, dass für den Abstand einer Funktion $u \in X$ zu V gilt:

$$\operatorname{dist}(u, V) := \inf_{v \in V} \|u - v\|_\infty = \left| \int_0^1 u(x)dx \right| \text{ für alle } u \in X.$$

(d) Zeigen Sie, dass

$$\left| \int_0^1 u(x)dx \right| < \|u\|_\infty \text{ für alle } u \in X \setminus \{0\}.$$

und folgern Sie, dass es kein $v_0 \in V$ gibt, so dass

$$\operatorname{dist}(u, V) = \|u - v_0\|_\infty.$$

Abgabe am Donnerstag, 10.12.09.

Aktuelle Übungsblätter auf
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsi/schweizer/uebungen-ana3-2009.html`