Übungsblatt 9 10.12.2009

Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2009/10

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. M. Lenzinger

1) Folgenraum l^2.

Wir betrachten die Menge $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ aller Folgen über $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} : x_k \in \mathbb{R} \text{ für } k \in \mathbb{N}\}.$$

Zu $x = (x_k) \in \mathbb{R}^N$ definieren wir die Norm

$$\|x\|_{l^2} := \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^2\right)^{1/2}$$

und den Hilbertraum

$$l^2(\mathbb{N},\mathbb{R}) := \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|x\|_{l^2} < \infty\right\}$$

mit den Basisvektoren $e_k = (\delta_{kl})_{l\in\mathbb{N}}$.

Untersuchen Sie, ob die folgenden Teilmengen von $l^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ folgenkompakt sind.

(a) $A := \left\{x \in l^2(\mathbb{N},\mathbb{R}) : |x_k| \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\right\}$

(b) $B := B_1(0) = \{x \in l^2(\mathbb{N},\mathbb{R}) : \|x\|_{l^2} \leq 1\}$

2) Legendre-Polynome.

Für $(-1,1)$ sei ein Polynom vom Grad k definiert durch

$$L_k(x) := \sqrt{\frac{2k+1}{2}}\frac{1}{2^k k!}\left(\frac{d}{dx}\right)^k (x^2-1)^k$$

Zeigen Sie: Die Polynome L_k bilden ein Orthonormalsystem in $L^2((-1,1))$.

3) Fourier-Reihen.

Berechnen Sie die Fourier-Reihe für die folgenden periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$(a) \qquad f(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{\pi} + 1, & x \in [-\pi, 0] \\ -\dfrac{x}{\pi} + 1, & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

$$(b) \qquad g(x) := \frac{x}{\pi}, \qquad x \in (-\pi, \pi)$$

*(c) Veranschaulichen Sie mit Hilfe von Maple, Matlab o.ä. die Fourier-Entwicklung der obigen Funktionen. Zeichnen Sie dazu die Funktion und die Summe der ersten 5-10 Glieder der Reihe.

Abgabe am Donnerstag, 17.12.09.

Aktuelle Übungsblätter auf
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsi/schweizer/uebungen-ana3-2009.html`