Übungsblatt 10 17.12.2009

Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2009/10

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. M. Lenzinger

1) Fourier-Entwicklung.

Berechnen Sie die Fourier-Reihe für die periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = |\sin(x)|, \qquad x \in (-\pi, \pi).$$

Veranschaulichen Sie das Ergebnis mit Hilfe von Maple, Matlab o.ä.

2) $H^1((-\pi, \pi))$.

Sei $u : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ definiert durch $u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}}^{\infty} c_k e^{ikx}$ mit $\sum_{k \in \mathbb{Z}}^{\infty} |kc_k|^2 < \infty$. Zeigen Sie, dass es ein $v \in L^2((-\pi, \pi))$ gibt, so dass

$$\int_{-\pi}^{\pi} v\varphi = -\int_{-\pi}^{\pi} u \partial_x \varphi$$

für alle $\varphi \in C^2([-\pi, \pi])$, $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi) = 0$. Die Funktion v heisst *schwache* Ableitung von u. Entwickeln Sie dazu die Funktion φ und ihre Ableitung in eine Fourierreihe.

3) Poincaré-Ungleichung.

Sei $L > 0$. Zeigen Sie: Für eine stetig differenzierbare Funktion $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(L) = 0$ gilt

$$\int_0^L |f(x)|^2 dx \le \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^L |f'(x)|^2 dx$$

Betrachten Sie dazu zunächst den Fall $L = \pi$ und zeigen Sie die Ungleichung für die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{für } x \in [0, \pi], \\ -f(-x), & \text{für } x \in [-\pi, 0]. \end{cases}$$

4) Schwingende Saite.

Eine Saite der Länge π sei in den Punkten $x = 0$ und $x = \pi$ fest eingespannt. Die Saite wird z.B. durch Zupfen in Bewegung versetzt und hat im Punkt x zur Zeit t eine gewisse Auslenkung $u(x,t)$ und eine Auslenkungsgeschwindigkeit $\partial_t u$. Das Bewegungsgesetz der Saite ist die *partielle* Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{auf } (0,\pi), \quad c > 0,$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \text{ für alle } t \in [0,\infty),$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ \partial_t u(x,0) = u_1(x) \text{ für alle } x \in [0,\pi].$$

Hierbei sind u_0 und u_1 zwei gegebene Funktionen mit $u_0(0) = u_1(0) = 0$ sowie $u_0(\pi) = u_1(\pi) = 0$.

(a) Wir suchen eine Lösung in Form einer Fourier-Reihe gegeben durch

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \sin(kx)$$

Bestimmen Sie eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Koeffizienten b_k und deren allgemeine Lösung.

(b) Finden Sie zu gegebenen Anfangsdaten $u_j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^j \sin(kx)$, $j = 0, 1$, einen Kandidaten für die Lösung u.

(c) Für die Fourierkoeffizienten der Anfangsdaten gelte

$$\sum_{k=1}^{\infty} |kc_k^0|^2 < \infty \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} |c_k^1|^2 < \infty.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion u aus (b) die Anfangsbedingung erfüllt, das heisst $\|u(t) - u_0\|_{L^2((-\pi,\pi))} \to 0$ und $\|\partial_t u(t) - u_1\|_{L^2((-\pi,\pi))} \to 0$ für $t \to 0$. Zeigen Sie dazu, dass die Reihen $\sum_k |b_k(t) - c_k^0|^2$ bzw. $\sum_k |b_k'(t) - c_k^1|^2$ gleichmässig beschränkt in t sind.

Frohe Weihnachten und einen guten Start ins neue Jahr !

Abgabe am Donnerstag, 07.01.2010.

Aktuelle Übungsblätter auf
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsi/schweizer/uebungen-ana3-2009.html`