Übungsblatt 11 07.01.2010

Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2009/10

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. M. Lenzinger

1) Konvergenz in L^p.

Untersuchen Sie die angegebenen Funktionenfolgen auf punktweise Konvergenz (überall bzw. fast überall), auf Konvergenz in L^p sowie auf gleichmässige Konvergenz.

(a) $f_k(x) := (\cos(x))^k$ auf $(-\pi, \pi)$

(b) $g_k(x) := (-1)^k \dfrac{\cos(x)}{k}$ auf $(-\pi, \pi)$

(c) $u_k(x) := \sin(1/x)^k$ auf $(0, \pi)$

(d) $v_k(x) := x^k$ auf $[0, 1]$.

2) Konvergenzsätze.

(a) Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Lebesgue-)integrierbar, so gilt

$$\lim_{k\to\infty} f(x+k) = 0$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Sei $f_k(x) := k^{4/3} x^2 e^{-kx^2}$. Bestimmen Sie $\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)dx$.

3) Wärmeleitungsgleichung.

Die Temperaturverteilung $u = u(x,t)$ in einem zweidimensionalen quadratischen Körper $\Omega := (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ wird für $t > 0$ beschrieben durch die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \text{auf } (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi),\ t > 0.$$

Hierbei beschreibt $\alpha > 0$ die Leitfähigkeit. Wir betrachten die Situation konstanter Temperatur auf dem Rand des Körpers, d.h. $u(x,t) = 0$ auf $\partial\Omega$ für $t > 0$.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ starten wir mit der gegebenen Temperaturverteilung u_0, von der wir annehmen, dass sie durch die Fourierreihe

$$u_0(x,y) := \sum_{k,l=0}^{\infty} c^0_{k,l} \sin kx \sin ly, \qquad (x,y) \in (-\pi,\pi) \times (-\pi,\pi)$$

gegeben ist. Bestimmen Sie eine Lösung der Gleichung zu dieser Anfangsbedingung.

4) Kugelvolumen und Kugeloberfläche.

Sei $B^3_R := B_R(0)$ die dreidimensionale Kugel um den Nullpunkt mit Radius R und $S^2_R := \partial B^3_R$ ihre Oberfläche. Wir wissen bereits, dass das Volumen der Kugel durch $V(R) = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ und die Oberfläche durch $S(R) = 4\pi R^2$ gegeben ist. Man erkennt, dass $S(R) = \dfrac{d}{dR} V(R)$ ist. Warum gilt diese Beziehung ?

Abgabe am Donnerstag, 14.01.2010.

Aktuelle Übungsblätter auf
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsi/schweizer/uebungen-ana3-2009.html`