Übungsblatt 12 14.01.2010

Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2009/10

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. M. Lenzinger

1) Kugelzone.

Sei F die durch $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $\alpha \le z \le \beta$ mit $-r \le \alpha < \beta \le r$ definierte Kugelfläche.

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung von F in Kugelkoordinaten an.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von F.

2) Gaußscher Satz.

Berechnen Sie die Oberflächenintegrale

$$(a) \quad \int_S (3x, 4y, 5z) \cdot \nu, \qquad S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$$

$$(b) \quad \int_{\partial Q} (x, y^2, z^3) \cdot \nu, \qquad Q := [-1,1]^3$$

(i) direkt und (ii) mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.

3) Fluss durch Oberfläche.

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $f(x) := \dfrac{x - x_0}{|x - x_0|^n}$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$.

(a) Berechnen Sie den *Fluss* $\displaystyle\int_{\partial B_\varepsilon} f \cdot \nu$ durch den Rand der Kugel $B_\varepsilon := B_\varepsilon(x_0)$.

(b) Sei $x_0 = 0$. Durch $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$ wird eine Ellipse E mit den Halbachsen $a, b > 0$ in $\mathbb{R}^2$ beschrieben. Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen Satzes den Fluss $\displaystyle\int_{\partial E} f \cdot \nu$ durch den Rand der Ellipse E.

4) Wärmeleitungsgleichung.

Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung auf dem Gebiet $\Omega := (0,1) \times (0,1)$ (vgl. Blatt 11, Aufgabe 3). Leiten Sie eine Gleichung für die zeitliche Änderung $\partial_t U$ des Temperaturmittelwerts $U(t) := \int_\Omega u(x,t)dx$ in Abhängigkeit des Wärmestroms ∇u auf dem Rand her.

Abgabe am Donnerstag, 21.01.2010.

Aktuelle Übungsblätter auf
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsi/schweizer/uebungen-ana3-2009.html`