Übungsblatt 13 21.01.2010

Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2009/10

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. M. Lenzinger

1) Fluss und Volumen.

Durch $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ wird ein Ellipsoid E mit den Halbachsen $a, b, c > 0$ in $\mathbb{R}^3$ beschrieben. Mit ν sei der äussere Normalenvektor auf dem Rand $S = \partial E$ bezeichnet. Berechnen Sie den *Fluss* $F := \int_S f \cdot \nu$ des Vektorfeldes

$$f(x, y, z) := \left(\arctan(xy) + e^{z^2}, y + \cos(x \sin z), -\frac{yz}{1 + (xy)^2} \right)$$

durch die Randfläche S. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Volumen des Ellipsoids (s. Blatt 5, Aufgabe 2).

2) Divergenz im $\mathbb{R}^3$.

Sei $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar und erfülle die Bedingungen

$$|u(x)| \leq \frac{\varphi(|x|)}{|x|^2}$$

mit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(r) \to 0$ für $r \to \infty$ sowie

$$\left| \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right| \leq \frac{\psi(|x|)}{|x|^2}, \quad k = 1, 2, 3,$$

mit $\psi \in L^1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie: $\int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div} u = 0$.

3) Satz von Stokes in $\mathbb{R}^2$.

Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$ sowie $f(x, y) := (-y, x)$. Berechnen Sie für $\operatorname{rot} f := \partial_x f_2 - \partial_y f_1$ das Integral $\int_A \operatorname{rot} f$ sowie das Integral $\int_{\partial A} f \cdot \tau$ über den Rand des Dreiecks mit dem Tangentialvektor τ.

4) Stokesscher Satz.

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $f(x,y,z) := (z,x,y)$. Berechnen Sie $\displaystyle\int_F \operatorname{rot} f \cdot \nu$ einmal direkt und einmal mit Hilfe des Stokesschen Satzes

(a) für die Fläche $F_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0\}$

(b) für die Fläche $F_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, y \leq 1,\ z = 1\}$

Abgabe am Donnerstag, 28.01.2010.

Aktuelle Übungsblätter auf
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsi/schweizer/uebungen-ana3-2009.html`