ÜBUNGSBLATT 1
ANALYTISCHE GEOMETRIE - MAT105 (TEIL 2) - WS 2009/2010
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK, TU DORTMUND

PROF. DR. LORENZ SCHWACHHÖFER, DR. TOM KRANTZ

Aufgabe 1

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie dass das Kreuzprodukt folgende Eigenschaften hat: Für alle $x, y, z, w \in \mathbb{R}^3$,

(a) $x \times (y \times z) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z$ und $(x \times y) \times z = \langle x, z \rangle y - \langle y, z \rangle x$,

(b) $\langle w \times x, y \times z \rangle = \langle w, x \times (y \times z) \rangle$,

(c) $\langle w \times x, y \times z \rangle = \det \begin{pmatrix} \langle w, y \rangle & \langle w, z \rangle \\ \langle x, y \rangle & \langle x, z \rangle \end{pmatrix}$,

(d) $w \times (x \times (z \times w)) = \langle w, x \rangle w \times z$.

(*Hinweis:* Benutzen Sie für (a) eventuell Satz 9.5 der Vorlesung.)

Aufgabe 2

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) Ist $x_0 \in V$ und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so ist $\mathcal{A} := x_0 + U := \{x_0 + u \mid u \in U\} \subseteq V$ ein affiner Unterraum mit $Lin(\mathcal{A}) = U$.

(b) Ist $\mathcal{A} \subseteq V$ ein affiner Raum und $x_0 \in \mathcal{A}$, so ist $\mathcal{A} = x_0 + U$ mit $U := Lin(\mathcal{A})$.

Aufgabe 3

Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{K}^n$ ein affiner Raum.

(a) Zeige: Es gibt eine Matrix $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ und ein $b \in \mathbb{K}^m$, so dass $\mathcal{A} = Lös(Ax = b)$.

(b) Bestimme das kleinste m, für das eine solche Darstellung möglich ist.

Aufgabe 4

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $p_1, p_2, \ldots, p_n \in V$.

(a) Zeige: $\mathcal{A}_0 := \{\sum_{i=1}^n t_i p_i \mid t_i \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^n t_i = 1\}$ ist ein affiner Raum, der $p_1, p_2, \ldots, p_n$ enthält.

(b) Zeige: Ist $\mathcal{A} \subseteq V$ ein affiner Raum, der $p_1, p_2, \ldots, p_n$ enthält, so ist $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$.

Date: 15.10.2009.