ÜBUNGSBLATT 2
ANALYTISCHE GEOMETRIE - MAT105 (TEIL 2) - WS 2009/2010
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK, TU DORTMUND

PROF. DR. LORENZ SCHWACHHÖFER, DR. TOM KRANTZ

Aufgabe 1

Seien V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume. Zeigen Sie dass für eine Abbildung $\phi : V \to W$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) ϕ ist affin.
(2) Für alle $x, y \in V$ und $t \in \mathbb{K}$ gilt: $\phi(tx + (1-t)y) = t\phi(x) + (1-t)\phi(y)$.
(3) Für alle $x_1, \ldots, x_k \in V$ und $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{K}$ mit $t_1 + \ldots + t_k = 1$ gilt:
$$\phi(t_1 x_1 + \ldots + t_k x_k) = t_1\phi(x_1) + \ldots + t_k\phi(x_k).$$

(Hinweis: Zeigen Sie (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (3).)

In den folgenden Aufgaben ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum endlicher Dimension mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und der dazugehörigen Norm $\|\cdot\|$. Wir definieren $d(x, y) := \|x - y\|$ für $x, y \in V$ und $d(A, B) := \inf(\{d(x, y) | x \in A, y \in B\})$ für A, B Untermengen von V.

Aufgabe 2

Sei $\mathcal{A} \subset V$ ein affiner Unterraum und y ein Punkt in V.
Zeigen Sie dass es genau einen Punkt $x \in \mathcal{A}$ gibt, so dass $d(x, y) = d(\mathcal{A}, \{y\})$.
Zeigen Sie dass für den entsprechenden Punkt x gilt: $x - y \in Lin(\mathcal{A})^{\perp}$.

Aufgabe 3

Sei $\mathcal{A} \subset V$ eine *Hyperebene i.e.* ein affiner Raum der Dimension $\dim(V) - 1$. Man bezeichnet als *Hessesche Normalform* von $\mathcal{A}$ die Angabe von einem Paar (N, d_0), wobei $d_0 = d(\{0\}, \mathcal{A})$ und N einen zu $\mathcal{A}$ normalen Vektor der Norm 1 darstellt, der im Falle $d_0 \neq 0$ zum Halbraum orientiert ist, der 0 nicht enthält.

(1) Berechnen Sie die Hessesche Normalform der Hyperebene $\{(x, y, z)^t | x + 2y + 3z = 7\} \subset \mathbb{R}^3$.
(2) Zeigen Sie dass $\mathcal{A} = \{x \in V | \langle x, N\rangle = d_0\}$.
(3) Zeigen Sie dass für jeden Punkt $y \in V$ gilt: $d(\{y\}, \mathcal{A}) = |\langle y, N\rangle - d_0|$.

Aufgabe 4

Sei $V = \mathbb{R}^3$. Seien $g_1 = x_1 + \mathbb{R}v_1$, $g_2 = x_2 + \mathbb{R}v_2$ zwei Geraden in V.
Zeigen Sie dass es $y_1 \in g_1$ und $y_2 \in g_2$ gibt, so dass $d(g_1, g_2) = d(y_1, y_2)$.
Leiten Sie eine Formel her für $d(g_1, g_2)$.

Date: 29.10.2009.