ÜBUNGSBLATT 3
ANALYTISCHE GEOMETRIE - MAT105 (TEIL 2) - WS 2009/2010
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK, TU DORTMUND

PROF. DR. LORENZ SCHWACHHÖFER, DR. TOM KRANTZ

Aufgabe 1

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Für eine Hyperebene H sei σ_H die (orthogonale) Spiegelung an H. Seien H_1 und H_2 zwei Hyperebenen in V.

(1) Zeigen Sie dass $\sigma_{H_1}(H_2)$ eine Hyperebene in V ist.
(2) Zeigen Sie dass
$$\sigma_{H_1} \circ \sigma_{H_2} \circ \sigma_{H_1} = \sigma_{(\sigma_{H_1}(H_2))}.$$

Aufgabe 2

Sei $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die affine Abbildung definiert durch $\phi(x) = \phi_0(x) + x_0$ wobei ϕ_0 gegeben ist durch die Matrix
$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -5 & -2\sqrt{15} & -\sqrt{15} \\ 2\sqrt{15} & -6 & 2 \\ \sqrt{15} & 2 & -9 \end{pmatrix}$$
in der Standardbasis und $x_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}^t$.

(1) Zeigen Sie dass ϕ eine Isometrie ist.
(2) Zerlegen Sie ϕ in Spiegelungen an Hyperebenen.

Aufgabe 3

Sei $V = \mathbb{R}^3$, $q = (q_1, q_2, q_3)^t \in V$, $u = (u_1, u_2, u_3)^t \in V$, $\lambda \in [0, 1]$. Die Menge der Punkte x so dass
$$\frac{|\langle x - q, u \rangle|}{\|x - q\| \|u\|} = \lambda$$
wird als *Kegel* $\mathcal{K}$ bezeichnet.

(1) Skizzieren Sie $\mathcal{K}$ im Fall $q = (0, 0, 1)^t, u = (0, 1, 0)^t$ und $\lambda = \frac{1}{2}$.
(2) Zeigen Sie dass die Schnittmenge von $\mathcal{K}$ mit der Ebene $\mathrm{span}((1, 0, 0)^t, (0, 1, 0)^t) \simeq \mathbb{R}^2$ eine Quadrik ist. Geben Sie Bedingungen für q, u, λ an unter denen diese Schnittmenge eine Ellipse, eine Hyperbel, eine Parabel ist.

Aufgabe 4

Sei $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^2$ die Quadrik gegeben durch die Gleichung
$$x^2 + 11y^2 + 10\sqrt{3}xy - (16 + 4\sqrt{3})x + (4 - 16\sqrt{3})y + 16 = 0.$$
Beweisen Sie dass $\mathcal{Q}$ eine Hyperbel ist und bringen Sie $\mathcal{Q}$ durch eine Isometrie in die Standardform.

Date: 12.11.2009.