ÜBUNGSBLATT 5
ANALYTISCHE GEOMETRIE - MAT105 (TEIL 2) - WS 2009/2010
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK, TU DORTMUND

PROF. DR. LORENZ SCHWACHHÖFER, DR. TOM KRANTZ

Aufgabe 1 & 2

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(1) Seien A, B und C drei paarweise verschiedene Punkte der projektiven Gerade $g \subset P(V)$. Zeigen Sie dass es a, b und c in V gibt, so dass $A = \mathbb{K}a$, $B = \mathbb{K}b$ und $C = \mathbb{K}c$ und $c = a + b$.

(2) Seien A, A', B, B' vier paarweise verschiedene und nicht kolineare Punkte in $P(V)$. Zeigen Sie dass die (projektiven) Geraden (AA') und (BB') sich genau dann in einem Punkt schneiden, wenn die Geraden (AB) und $(A'B')$ sich in einem Punkt schneiden.

(3) Seien A, A', B, B', C, C' sechs Punkte in $P(V)$, so dass beliebige drei davon nicht kolinear sind. Seien $X = (AB) \cap (A'B')$, $Y = (BC) \cap (B'C')$, $Z = (AC) \cap (A'C')$.

   (a) Zeigen Sie dass wenn die Geraden (AA'), (BB') und (CC') sich in einem Punkt schneiden, dann liegen X, Y und Z auf einer Gerade. (*Desargue's Theorem*)

   (b) Zeigen Sie dass wenn X, Y und Z auf einer Gerade liegen, dann schneiden sich die Geraden (AA'), (BB') und (CC') in einem Punkt.

Aufgabe 3

Sei $\phi : P(V) \to P(V)$ eine projektive Abbildung. Man sagt dass $A \in P(V)$ ein *Fixpunkt für* ϕ ist, wenn $\phi(A) = A$.

(1) Zeigen Sie dass im Fall $V = \mathbb{C}^n$ jede projektive Abbildung $\phi : P(V) \to P(V)$ einen Fixpunkt hat.

(2) Geben Sie ein Beispiel einer projektiven Abbildung $\phi : P(\mathbb{R}^4) \to P(\mathbb{R}^4)$ ohne Fixpunkt an.

Aufgabe 4

Seien g_1, g_2, g_3 drei paarweise verschiedene (projektive) Geraden von $P(\mathbb{R}^3)$, die sich in dem Punkt $P \in P(\mathbb{R}^3)$ schneiden und seien g'_1, g'_2 und g'_3 drei paarweise verschiedene Geraden von $P(\mathbb{R}^3)$, die sich in dem Punkt P' schneiden. Sei Φ die Menge der projektiven Abbildungen $\phi : P(\mathbb{R}^3) \to P(\mathbb{R}^3)$, so dass $\forall i = 1..3, g'_i = \phi(g_i)$.

(1) Zeigen Sie, dass es wenigstens eine projektive Abbildung $\phi \in \Phi$ gibt.

(2) Zeigen Sie, dass für jede Gerade $g \subset P(\mathbb{R}^3)$, so dass $P \in g$, die Gerade $\phi(g)$ nicht von der Wahl von $\phi \in \Phi$ abhängt.

(*Hinweis: Wählen Sie zuerst zwei geeignete projektive Basen für* $P(\mathbb{R}^3)$*.)*

Date: 10.12.2009.