ÜBUNGSBLATT 6
ANALYTISCHE GEOMETRIE - MAT105 (TEIL 2) - WS 2009/2010
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK, TU DORTMUND

PROF. DR. L. SCHWACHHÖFER, DR. T. KRANTZ, DIPL.-MATH. A. KAYAÇELEBI

Aufgabe 1 (4p)

Seien $P_k := [x_k^0 : \cdots : x_k^n]$, für $k = 0, \ldots, 3$, vier paarweise verschiedene Punkte auf einer projektiven Gerade $g \subset P(\mathbb{K}^{n+1})$. Zeigen Sie dass es Indizes r und s in $\{0, \ldots, n\}$ gibt, so dass $P'_k := [x_k^r : x_k^s]$ für $k = 0, \ldots, 3$ vier paarweise verschiedene Punkte von $P(\mathbb{K}^2)$ darstellen. (*Bemerkung: Es gilt dann laut Satz 11.14, dass* $DV(P_0, P_1, P_2, P_3) = DV(P'_0, P'_1, P'_2, P'_3)$.)

Aufgabe 2 (6p)

(1) Seien $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{K}^2$. Zeigen Sie dass
$$|x_0x_1||x_2x_3| + |x_0x_2||x_3x_1| + |x_0x_3||x_1x_2| = 0,$$
wobei $|x_ix_j|$ die 2x2-Determinante der beiden Vektoren x_i, x_j ist.

(2) Sei $V = \mathbb{K}^n$ und seien $P_0, \ldots, P_3 \in P(V)$ verschiedene Punkte auf einer projektiven Geraden, und sei $\lambda := DV(P_0, P_1, P_2, P_3)$. Dann gilt:
  - (a) $DV(P_1, P_0, P_3, P_2) = DV(P_2, P_3, P_0, P_1) = \lambda$.
  - (b) $DV(P_1, P_0, P_2, P_3) = DV(P_0, P_1, P_3, P_2) = \lambda^{-1}$.
  - (c) $DV(P_3, P_1, P_2, P_0) = DV(P_0, P_2, P_1, P_3) = 1 - \lambda$.
  - (d) $DV(P_2, P_1, P_0, P_3) = DV(P_0, P_3, P_2, P_1) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$.

Aufgabe 3 (6p)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und α ein Körperisomorphismus von $\mathbb{K}$. Sei $\hat{\phi} : V \to V$ eine injektive semi-lineare Abbildung, so dass für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in V$, $\hat{\phi}(\lambda v) = \alpha(\lambda)\hat{\phi}(v)$. Sei $\phi := P(\hat{\phi}) : P(V) \to P(V)$ die zu $\hat{\phi}$ gehörige semi-projektive Abbildung.

Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass für $P_0, \ldots P_3$ vier Punkte auf einer Geraden in $P(V)$,
$$DV(\phi(P_0), \phi(P_1), \phi(P_2), \phi(P_3)) = \alpha(DV(P_0, P_1, P_2, P_3)).$$

(1) Zeigen Sie die Gleichung im Fall $V = \mathbb{K}^{n+1}$ und $\hat{\phi}((x_0, x_1, \ldots, x_n)^t) = (\alpha(x_0), \ldots, \alpha(x_n))^t$.

(2) Zeigen Sie die Gleichung im Fall $V = \mathbb{K}^{n+1}$. (*Hinweis: Satz 11.18*)

(3) Zeigen Sie die Gleichung für einen beliebigen endlichdimensionalen projektiven Raum $P(V)$.

Date: 07.01.2010.