ÜBUNGSBLATT 7
ANALYTISCHE GEOMETRIE - MAT105 (TEIL 2) - WS 2009/2010
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK, TU DORTMUND

PROF. DR. L. SCHWACHHÖFER, DR. T. KRANTZ, DIPL.-MATH. A. KAYAÇELEBI

Aufgabe 1

Erinnert sei daran, dass durch Identifikation von $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$, jede Drehstreckung sich durch die Formeln $\phi_{a,b}(z) = az + b$ für $z \in \mathbb{C}$ und $\phi_{a,b}(\infty) = \infty$ ausdrücken lässt, wobei $a, b \in \mathbb{C}$, mit $a \neq 0$.

(1) Zeigen Sie, dass $\sigma_{K(0,1)}(z) = (\bar{z})^{-1}$ und stellen Sie eine allgemeine Formel auf für $\sigma_{K(p,r)}$.
(2) Zeigen Sie, dass für $\phi := \phi_{a,b}$ und die Inversion σ_K am Kreis $K = K(p,r)$ gilt:

$$\phi \circ \sigma_K \circ \phi^{-1} = \sigma_{\phi(K)}.$$

Aufgabe 2

(1) Zeigen Sie, dass für festgelegte $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, *Lös*$(\bar{a}z + a\bar{z} + \alpha = 0)$ eine Gerade ist und dass umgekehrt, jede Gerade sich so darstellen lässt.
(2) Zeigen Sie, dass für festgelegte $a \in \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, *Lös*$(z\bar{z} + \bar{a}z + a\bar{z} + \alpha = 0)$ ein Kreis ist und dass umgekehrt, jeder Kreis sich so darstellen lässt.

Aufgabe 3

Sei $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Sei $\sigma_{K(p,r)} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ eine Inversion am Kreis $K(p,r)$.

(1) Zeigen Sie, dass $\sigma_{K(p,r)}$ Kreise, die p nicht enthalten, auf Kreise abbildet, die p nicht enthalten.
(2) Zeigen Sie, dass $\sigma_{K(p,r)}$ Kreise, die p enthalten, auf Geraden abbildet, die p nicht enthalten und umgekehrt.
(3) Zeigen Sie, dass $\sigma_{K(p,r)}$ Geraden, die p enthalten, auf sich selbst abbildet.

(*Hinweise: In dieser Aufgabe gehen wir davon aus, dass jede Gerade den Punkt ∞ enthält. Eine Möglichkeit besteht darin zu zeigen, dass durch Anwendung der Aufgabe 1.2 man sich auf den Fall beschränken kann, in dem $p = 0$, $r = 1$, Geraden orthogonal zur x-Achse, Kreise mit Zentrum auf der x-Achse sind.*)

Aufgabe 4

Sei $i : \hat{\mathbb{C}} \to P(\mathbb{K}^2)$, $i(\lambda) := [\lambda : 1]$ für $\lambda \in \mathbb{C}$, $i(\infty) = [1 : 0]$. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ so dass $ad - bc \neq 0$. Sei ψ oder $\psi_{a,b,c,d}$ die Abbildung von $\hat{\mathbb{C}}$ nach $\hat{\mathbb{C}}$, so dass für $z \in \mathbb{C}$,

$$\psi(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{falls } cz + d \neq 0, \\ \infty & \text{falls } cz + d = 0, \end{cases} \quad \psi(\infty) = \begin{cases} \frac{a}{c} & \text{wenn } c \neq 0, \\ \infty & \text{wenn } c = 0. \end{cases}$$

Wir definieren $\hat{\phi} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ durch

$$\hat{\phi}(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \hat{\mathbb{C}} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "i"'] & \hat{\mathbb{C}} \arrow[d, "i"'] \\ P(\mathbb{C}^2) \arrow[r, "P(\hat{\phi})"] & P(\mathbb{C}^2) \end{tikzcd}$$

wobei $P(\hat{\phi})$ die Projektivierung von $\hat{\phi}$ ist.

Folgern Sie daraus, dass $G = \{\psi_{a,b,c,d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0\}$ eine Gruppe für die Hintereinanderausführung ist (*Möbius Gruppe*).

Date: 21.01.2010.