Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Dr. (USA) M. Charina
Dipl. Math. A. Rademacher

14. Oktober 2009

Numerik I

1. Übung

Aufgabe 1.1

Beantworten Sie stichwortartig die folgenden Fragen (wenn angegeben, mit kurzer Begründung).

1. Wann heißt eine Matrix orthogonal bzw. unitär? Man gebe ein nichttriviales Beispiel einer reellen orthogonalen 3×3-Matrix an.
2. Was ist der Unterschied zwischen der algebraischen und der geometrischen Vielfachheit eines Eigenwertes?
3. Warum besitzen hermitesche Matrizen nur reelle Eigenwerte? Warum stehen Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten senkrecht aufeinander?
4. Wann heißt eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar?
5. Wann heißt eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (strikt) konvex? Wie läßt sich dies mit Hilfe von Ableitungen charakterisieren?
6. Besitzen strikt konvexe Funktionen notwendig ein Infimum? (Beweis oder Gegenbeispiel) Falls ja, wird dieses auch angenommen?
7. Man begründe, dass stetige Funktionen auf kompakten Mengen ihr Minimum und ihr Maximum annehmen.
8. Wie lautet die Taylor-Entwicklung der Funktion $f : x \to \sin \pi x$ um 0?
9. Es seien n Vektoren aus dem $\mathbb{R}^m$ gegeben, $n > m$. Wieviele verschiedene Basen des $\mathbb{R}^m$ lassen sich aus ihnen maximal bilden? In welchem Fall wird die Maximalzahl erreicht?
10. Man gebe die Taylor-Entwicklung der Funktion $f : (x_1, x_2) \to x_1^2 + x_2^2$ um den Punkt $(1, 2)$ an.
11. Eine Folge $\{a_n\}$ erfülle die Ungleichung

    $$a_{n+1} \leq 12a_n^2 \quad (a_n \geq 0).$$

    Ist sie notwendig konvergent? Man gebe eine hinreichende Bedingung für Konvergenz gegen 0 an.

12. Zu n Werten x_i, $i = 1, \ldots, n$, betrachte man die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Unter welchen Bedingungen ist sie regulär? Wie lautet die Determinante?

13. Unter welchen Bedingungen ist ein lineares Gleichungssystem

$$Ax = b$$

lösbar? (A nicht notwendig regulär.)

Aufgabe 1.2

Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke in der Form $f(h) = \mathbf{O}(h^\alpha)$ ($f(h) = \mathbf{o}(h^\alpha)$), α maximal, für $h \to 0$ bzw. in der Form $g(n) = \mathbf{O}(n^\beta)$ ($g(n) = \mathbf{o}(n^\beta)$), β minimal, für $n \to \infty$

(a) $f(h) = 4(h^3 + h)^2 - h^4$,

(b) $f(h) = (e^h - e^{-h})/2h - 1$,

(c) $g(n) = 4(n^3 + n)^2 - n^4$,

(d) $g(n) = \dfrac{1}{\ln(|\ln n|)}$,

(e) $g(n) = \sup \dfrac{1 - e^{-nx}}{1 - e^{-x}}$.