Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Dr. (USA) M. Charina
Dipl. Math. A. Rademacher

20. Oktober 2009

Numerik I

3. Übung

Aufgabe 3.1 (3 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für jede Vektornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{K}^n$ durch

$$\|A\| := \sup\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \mid x \in \mathbb{K}^n,\ x \neq 0\right\} = \sup\left\{\|Ax\| \mid x \in \mathbb{K}^n, \|x\| = 1\right\}$$

eine mit ihr "verträgliche" Matrixnorm erklärt ist. Diese wird als die von $\|\cdot\|$ erzeugte "natürliche" Matrixnorm bezeichnet.

(b) Zeigen Sie, dass die Frobenius-Norm

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} |a_{ik}|^2}$$

eine Matrixnorm ist, die mit $\|\cdot\|_2$ verträglich ist.

(c) Warum ist die Frobenius-Norm im Allgemeinen keine natürliche Matrixnorm?

Aufgabe 3.2

(a) Berechnen Sie für die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Inverse $A_i^{-1},\ i = 1, 2$, und die jeweiligen Konditionszahlen cond_1, cond_∞.

(b) Berechnen Sie für die Matrix

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1000\alpha \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

die Konditionszahl $\mathrm{cond}_\infty(M_\alpha)$ und bestimmen Sie α, so dass $\mathrm{cond}_\infty(M_\alpha)$ minimiert wird.

Aufgabe 3.3 (3 Punkte)

(a) Lösen Sie die Gleichungssysteme

(i) $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1.985 & -1.358 \\ 0.953 & -0.652 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2.212 \\ 1.062 \end{pmatrix},$$

(ii) $Ax = b^\star$ mit A wie in (i) und $b^\star = (2.212, 1.061)^T$.

(b) Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wie groß sind die relativen Fehler $\|\Delta x\|_1/\|x\|_1$ und $\|\Delta x\|_\infty/\|x\|_\infty$, wenn der relative Fehler in den Matrixelementen höchstens $\pm 1\%$ und in den Komponenten der rechten Seite höchstens $\pm 3\%$ beträgt?

Aufgabe 3.4

Lösen Sie durch Gaußsche Elimination (ohne Pivotierung) das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & -5 & -7 & -9 \\ 2 & 6 & 10 & 15 \\ 4 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 16 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Abgabe: Mittwoch, den 28.10.09 bis 14 Uhr.