Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Dr. (USA) M. Charina
Dipl. Math. A. Rademacher

4. November 2009

Numerik I

5. Übung

Aufgabe 5.1 (3 Punkte)

Es sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und ihre LR-Zerlegung $PA = LR$ mit einer Permutationsmatrix P gegeben.

(a) Im Skript sind die Ideen zur Berechnung von $\operatorname{rang}(A)$, $\det(A)$ und A^{-1} mit Hilfe der LR-Zerlegung angegeben. Entwickeln Sie auf Basis dieser Ideen Algorithmen, um $\operatorname{rang}(A)$, $\det(A)$ und A^{-1} mit Hilfe der LR-Zerlegung zu berechnen.

(b) Berechnen Sie eine LR-Zerlegung mit Spaltenpivotierung der Matrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 10 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie dabei den $\operatorname{rang}(A_1)$.

(c) Benutzen Sie die LR-Zerlegung aus (b), um $\det(A_1)$ und A_1^{-1} zu berechnen.

Aufgabe 5.2

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 2.1 & 2512 & -2516 \\ -1.3 & 8.8 & -7.6 \\ 0.9 & -6.2 & 4.6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -6.5 \\ 5.3 \\ -2.9 \end{pmatrix}.$$

(a) Lösen Sie $Ax = b$ zunächst exakt und dann in fünfstelliger Gleitkommaarithmetik (mit Spaltenpivotierung).

(b) Skalieren Sie das Gleichungssystem mit Hilfe einer Äquilibrierung/Zeilenskalierung, und berechnen Sie die Lösung des skalierten Systems mit Gaußelimination mit Spaltenpivotierung in fünfstelliger Gleitkommaarithmetik.

Aufgabe 5.3 (3 Punkte)

Neben der Gaußelimination kann auch der Algorithmus von Crout/Dolittle (auch direkte LR-Zerlegung genannt) zur Berechnung einer LR-Zerlegung der Matrix A verwendet werden. Der Algorithmus basiert auf den n^2 Bestimmungsgleichungen für die n^2 unbekannten Größen

$r_{jk},\ j \le k,\ g_{jk},\ j > k\,(g_{jj} = 1)$ die sich aus der Gleichung $A = LR$ ergeben. Die einzelnen Schritte sind:

$$\begin{aligned}
k = 1, \ldots, n: &\quad a_{1k} = \sum_{i=1}^{1} g_{1i} r_{ik} \Rightarrow r_{1k} := a_{1k}, \\
j = 2, \ldots, n: &\quad a_{j1} = \sum_{i=1}^{1} g_{ji} r_{i1} \Rightarrow g_{j1} := r_{11}^{-1} a_{j1}, \\
k = 2, \ldots, n: &\quad a_{1k} = \sum_{i=1}^{2} g_{2i} r_{ik} \Rightarrow r_{2k} := a_{2k} - g_{21} r_{1k},
\end{aligned}$$

usw. und allgemein für $j = 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned}
k = j, j+1, \ldots, n: &\qquad r_{jk} := a_{jk} - \sum_{i=1}^{j-1} g_{ji} r_{ik}, \\
k = j+1, j+2, \ldots, n: &\qquad g_{kj} := r_{jj}^{-1} \left(a_{kj} - \sum_{i=1}^{j-1} g_{ki} r_{ij} \right),
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der folgenden Matrizen durch das Verfahren von Crout/Dolittle:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.4

Wir betrachten die Nachiteration und nehmen an, dass für die näherungsweise LR-Zerlegung $\tilde{L}\tilde{R} = A + \Delta A =: \tilde{A}$ mit $\|\Delta A\| > 0$ einer regulären Matrix A die Bedingung

$$\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < \frac{1}{2}$$

für irgendeine submultiplikative und verträgliche Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{n \times n}$ erfüllt ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\tilde{A}$ nicht singulär ist.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe der Neumannschen Reihe, dass $\|I - \tilde{A}^{-1}A\| < 1$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass für den Fehler $e^{(k)} := x^{(k)} - x$ bei der Nachiteration mit exakter Rechnung folgende Beziehung gilt

$$e^{(k+1)} = (I - \tilde{A}^{-1}A)e^{(k)}.$$

(d) Beweisen Sie, dass bei exakter Rechnung der Fehler bei der Nachiteration gegen Null konvergiert, d.h. $\lim_{k\to\infty} e^{(k)} = 0$.

Abgabe: Mittwoch, den 11.11.2009 bis 14 Uhr.