Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Dr. (USA) M. Charina
Dipl. Math. A. Rademacher

5. November 2009

Numerik I

6. Übung

Aufgabe 6.1 (3 Punkte)

Man gebe die approximative Anzahl der Operationen (Multiplikationen und Divisionen) an, die man braucht, um folgende Probleme zu lösen:

(a) Lösung von $Rx = b$, R obere Dreiecksmatrix.

(b) Lösung von $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ mittels LR-Zerlegung und Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen.

(c) Wie b), aber A symmetrisch und positiv definit (Cholesky-Zerlegung).

(d) Lösung von $Ax = b_i$, $i = 1, \dots, p$, wenn die Faktorisierung $A = LR$ bekannt ist.

(e) Berechnung von A^{-1} mittels LR-Zerlegung.

(f) Lösung von $Ax = b$ mittels LR-Zerlegung und Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen, wenn A eine Bandmatrix mit der Bandbreite $m_l = m_r = 1$ ist.

Aufgabe 6.2

Bestimmen Sie mit dem Cholesky-Verfahren die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 8 & 8 & 8 & -2 & 2 \\ 1 & 8 & 26 & 4 & 7 & 7 \\ 2 & 8 & 4 & 18 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 7 & -1 & 42 & 13 \\ 4 & 2 & 7 & -4 & 13 & 40 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 2 \\ 11 \\ -45 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.3 (3 Punkte)

(a) Geben Sie analog zu Aufgabe 4.3(a) Rekursionsformeln zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung von positiv definiten Tridiagonalmatrizen T der Form

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & \\ b_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

an.

(b) Bestimmen Sie alle reellen Werte von a, für die die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -a & \\ & -a & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist. Ziehen Sie zur Analyse den Algorithmus aus Teil (a) heran.

Aufgabe 6.4

Nach dem Keplerschen Gesetz bewegt sich ein Himmelskörper im Sonnensystem auf einer ebenen Bahn von Ellipsen- oder Hyperbelform, wenn Störungen durch die Planeten vernachlässigt werden. Es bezeichnen (r, φ) Polarkoordinaten bzgl. des Standortes der Sonne. Die Bahn des Himmelskörpers ist dann gegeben durch die „Kegelschnittgleichung“

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}$$

mit einem Parameter p und der sogenannten Exzentrizität e. Für $0 \leq e < 1$ handelt es sich um eine Ellipse, für $e \geq 1$ um eine Hyperbel. Für einen neu entdeckten Himmelskörper werden die folgenden Beobachtungen gemacht:

Tag	15.01.	15.04.	15.06.	15.08.	15.09.
r	10	5	2.5	1.3	1
φ	51°	67°	83°	108°	126°

Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate den Typ der Kometenbahn. (Bringen Sie dazu zunächst die Gleichung in eine Form, die linear in 2 Unbekannten ist.)

Abgabe: Mittwoch, den 18.11.2009 bis 14 Uhr.