

Numerik I
7. Übung

Bitte beachten Sie die geänderte Abgabezeit für die Lösungen der Übungszettel! Die Lösungen müssen nun bis **12** Uhr abgegeben werden!

Aufgabe 7.1

Betrachtet werde das Gleichungssystem $Ax = b$ der Form

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 4 & 12 & -6 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Untersuchen Sie, ob das System lösbar ist.
- (b) Bestimmen Sie eine Lösung nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate.
- (c) Ist diese Lösung eindeutig?
- (d) Ist die Matrix $A^T A$ positiv definit?

Aufgabe 7.2 (3.5 Punkte)

Schreiben Sie ein Matlab-Programm, das eine Lösung x^* des linearen Ausgleichproblems

$$\|Ax^* - b\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$$

mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und einem Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ berechnet. Dabei soll die Matrix $A^T \cdot A$ nicht explizit berechnet werden. Sie dürfen dabei die Matlab-Funktion `qr` zur Bestimmung der QR -Zerlegung benutzen, ansonsten ist nur die Verwendung der grundlegenden arithmetischen Operationen gestattet. Die Matlab-Funktion soll den Aufruf

```
function xstar = myAusgleich(A,b)
```

besitzen und die zugehörige Datei `myAusgleich.m` heißen. Zum Testen Ihres Programms verwenden Sie folgendes Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 4 & 9 & -2 \\ 4 & 12 & -6 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 34 \\ 32 \end{pmatrix}, \quad x^* = \begin{pmatrix} -27 \\ 13\frac{1}{3} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7.3 (2.5 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Householder Transformation

$$Q_v = I - 2 \frac{v \cdot v^\top}{v^\top \cdot v}, \quad v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} :$$

- (a) $Q_v = Q_v^\top$
- (b) $Q_v^2 = I$
- (c) $Q_v y = y \iff y^\top v = 0$
- (d) $Q_v v = -v$
- (e) $Q_{\alpha v} = Q_v, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Aufgabe 7.4

Verwenden Sie das Householder-Verfahren um zu überprüfen, ob die Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 21 & 0 & 5 \\ 0 & 42 & 12 \\ 42 & -189 & -44 \\ -42 & 0 & -10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

vollen Rang haben und geben Sie die entsprechende QR -Zerlegung an.

Abgabe: Mittwoch, den 25.11.2009 bis **12** Uhr.